

Terminale S/Suites, variations et limites

1. Théorèmes des gendarmes :

Exercice 2554

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n , par la relation explicite: $u_n = \frac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

- Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n) .
- Établir l'encadrement suivant :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \frac{3n-1}{2n-1} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$$

- En déduire la valeur de convergence de (u_n) .

Exercice 2567

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :

$$u_n = \sqrt{2 \cdot n + 1} - \sqrt{2 \cdot n}$$

- Montrer l'égalité suivante pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot n + 1} + \sqrt{2 \cdot n}}$$

- Établir l'encadrement suivant :

$$0 < u_n < \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot n}}$$

- En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3441

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :

$$u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

- Établir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul: $\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}$
- En déduire la convergence de la suite (u_n) ; on précisera la valeur de la limite.

Exercice 5034

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par la relation :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2 \cdot u_n}$
 - En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq \sqrt{2}$
- Déduire des questions précédentes l'encadrement : $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq (u_n - \sqrt{2})^2$
 - A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq (u_0 - \sqrt{2})^{(2^n)}$
- Donner une valeur approchée de $|u_0 - \sqrt{2}|$ au millième près.
 - En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. Convergences de suites monotones :

Exercice 5815

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{3 \cdot u_n}{1 + 2 \cdot u_n}$

- Calculer u_1 et u_2 .
 - Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0 < u_n$.

- On admet que pour tout entier naturel n : $u_n < 1$.
 - Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - Démontrer que la suite (u_n) converge. (on ne demande pas la valeur de la limite).

Exercice 6910

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + 4 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.
2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que

la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Divergence de suites monotones :

Exercice 3473



On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2.
 - a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$: $u_n \geq 0$.
 - b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$
 - c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5. Autres types de suites :

Exercice 5732



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leq 2$.
2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

6. Suites définies conjointement :

Exercice 5900



On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2 \cdot v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n) .

Partie A

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la fonction f extrait d'un algorithme où le paramètre n est un entier supérieur ou égal à 1 :

```

Fonction f(n)
  u ← 0
  v ← 1
  Pour k variant de 1 à n
    w ← u
    u ← (w+v)/2
    v ← (w+2·v)/3
  Fin Pour
  Renvoyer (u ; v)
  
```

- a. On appelle la fonction f avec pour argument la valeur $n=2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-

dessous contenant l'état des variables au cours de l'appel à la fonction f .

k	w	u	v
1			
2			

- b. Pour un nombre entier N donné, à quoi correspond le couple de valeurs renvoyées par la fonction f par rapport à la situation étudiée dans cet exercice?

Partie B

1.
 - a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel, on a : $v_n - u_n > 0$
 - b. En déduire que la suite (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.
2. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Partie C

1. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $w_n = v_n - u_n$
 - a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.
 - b. Justifier que les limites des suites (u_n) et (v_n) sont égales.

2. On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $t_n = 2 \cdot u_n + 3 \cdot v_n$

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n .

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

7. Suites et fonctions :

Exercice 3519



On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2 \cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; \frac{9}{2} [$ par :

$$f(x) = \frac{x - 8}{2x - 9}$$

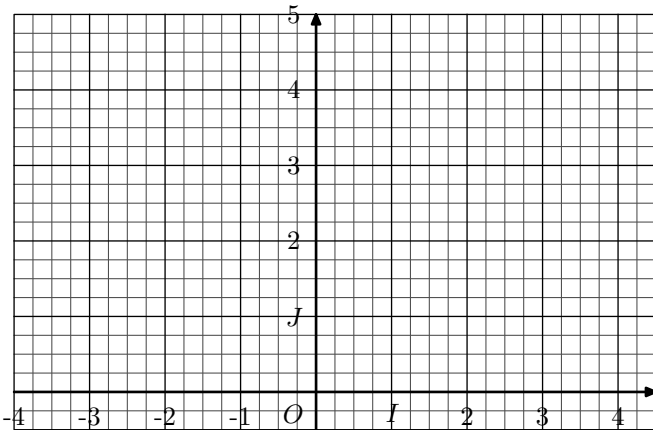
On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Citer les asymptotes de la courbe \mathcal{C}_f .

b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
En déduire le tableau de variations de la fonction f .

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.

d. Effectuer le tracé de la courbe \mathcal{C}_f dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture

sur le comportement de la suite (u_n) .

2. Démontrer que pour tout n de \mathbb{N} : $u_n < 1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge.
(On ne demande pas la valeur de la limite)

Exercice 3422



On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1,4 \cdot v_n - 0,05 \cdot v_n^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1,4x - 0,05 \cdot x^2$$

a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 8$

2. Etablir la convergence de la suite (v_n) (on ne demandera pas la valeur de la limite).

Exercice 5053



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0; 2]$ alors $f(x) \in [0; 2]$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir la convergence de la suite (u_n) (on ne demande pas la valeur de la limite).

8. Suite, exponentielles et logarithmes :

Exercice 288



Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = e^{u_n} \cdot (e^{u_n} - 1).$$

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = e^{2x} - e^x - x$$

1. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
 $g'(x) = (e^x - 1)(2 \cdot e^x + 1)$

2. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

3. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

Exercice 6908



Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2+1)$$

On admet que la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(x^2+1)$$

est croissante sur \mathbb{R} .

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

u_n appartient à $[0;1]$.

2. Etudier les variations de la suite (u_n) .

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité :

$$f(\ell) = \ell$$

En déduire la valeur de ℓ .