Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Terminale S/Suites, variations et limites

1. Théorèmes des gendarmes :

Exercice 2554

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation explicite : $u_n=\dfrac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

1. Déterminer les trois premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$.
2. Etablir l'encadrement suivant :
$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^* :\quad \frac{3n-1}{2n-1}\leqslant u_n\leqslant\frac{3n+1}{2n-1}$$
3. En déduire la valeur de convergence de $\left(u_n\right)$.

Exercice 2567

Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la formule explicite de son terme de rang n :
$$u_n = \sqrt{2{\cdot}n+1}-\sqrt{2{\cdot}n}$$

1. Montrer l'égalité suivante pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2{\cdot}n+1}+\sqrt{2{\cdot}n}}$$
2. Etablir l'encadrement suivant :
$$0 < u_n < \frac{1}{2{\cdot}\sqrt{2{\cdot}n}}$$
3. En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

Exercice 3441

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme de rang n est définie par la relation :
$$u_n = \frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}$$

1. Etablir l'encadrement suivant pour tout entier naturel n non-nul : $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{n}{n+1}$
2. En déduire la convergence de la suite $\left(u_n\right)$; on précisera la valeur de la limite.

Exercice 5034

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}{\cdot}\left(u_n+\frac{2}{u_n}\right) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1}-\sqrt{2} = \frac{\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2}{2{\cdot}u_n}$$
   b. En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n\geqslant\sqrt{2}$$
2. a. Déduire des questions précédentes l'encadrement :
$$0\leqslant u_{n+1}-\sqrt{2}\leqslant\left(u_n-\sqrt{2}\right)^2$$
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'encadrement ci-dessous pour tout entier naturel n :
$$0\leqslant u_n-\sqrt{2}\leqslant\left(u_0-\sqrt{2}\right)^{(2^n)}$$
3. a. Donner une valeur approchée de $\left|u_0-\sqrt{2}\right|$ au millième près.
   b. En déduire la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

3. Convergences de suites monotones :

Exercice 5815

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{3{\cdot}u_n}{1+2{\cdot}u_n}$

1. a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $0<u_n$.
2. On admet que pour tout entier naturel n : $u_n<1$.
   a. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ est croissante.
   b. Démontrer que la suite $\left(u_n\right)$ converge. *(on ne demande pas la valeur de la limite)*.

Exercice 6910

On considère la suite $\left(u_n\right)$ définie par :
$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}{\cdot}u_n+4 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

 (cc) BY-NC

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est majorée par 7.

2. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Divergence de suites monotones :

Exercice 3473

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + n - 2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démonter que pour tout entier naturel $n\geqslant 4$: $u_n \geqslant 0$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel $n\geqslant 5$: $u_n \geqslant n-3$

   c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Autres types de suites :

Exercice 5732

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = \sqrt{2u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n \leqslant 2$.

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

6. Suites définies conjointement :

Exercice 5900

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad v_0 = 1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2\cdot v_n}{3} \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Partie A

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme où le paramètre `n` est un entier supérieur ou égal à 1 :

```
Fonction f(n)
    u ← 0
    v ← 1
    Pour k variant de 1 à n
        w ← u
        u ← (w+v)/2
        v ← (w+2·v)/3
    Fin Pour
    Renvoyer (u;v)
```

   a. On appelle la fonction `f` avec pour argument la valeur `n`=2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'appel à la fonction `f`.

k	w	u	v
1			
2			

   b. Pour un nombre entier N donné, à quoi correspond le couple de valeurs renvoy'ees par la fonction `f` par rapport à la situation étudiée dans cet exercice?

Partie B

1. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel, on a : $v_n - u_n > 0$

   b. En déduire que la suite (u_n) est une suite croissante et (v_n) est une suite décroissante.

2. Justifier que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Partie C

1. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $w_n = v_n - u_n$

   a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.

   b. Justifier que les limites des suites (u_n) et (v_n) sont égales.

 BY-NC

2. On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $t_n = 2 \cdot u_n + 3 \cdot v_n$

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

7. Suites et fonctions :

Exercice 3519

On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2 \cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$

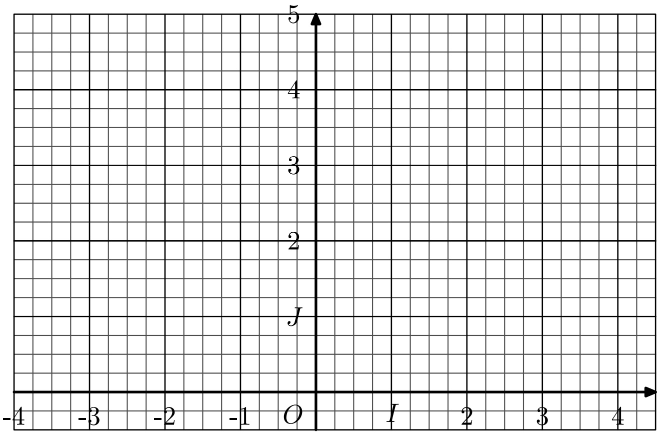
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
Citer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
En déduire le tableau de variations de la fonction f.

c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y = x$:



e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge. *(On ne demande pas la valeur de la limite)*

Exercice 3422

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1{,}4 \cdot v_n - 0{,}05 \cdot {v_n}^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 1{,}4x - 0{,}05 \cdot x^2$

a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$

2. Etablir la convergence de la suite (v_n) *(on ne demandera pas la valeur de la limite).*

Exercice 5053

On considère la fonction f définit sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

1. Montrer que si $x \in [0\,;2]$ alors $f(x) \in [0\,;2]$

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évalution.*

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Etablir la convergence de la suite (u_n) *(on ne demande pas la valeur de la limite).*

8. Suite, exponentielles et logarithmes :

Exercice 288

Soit a un nombre réel quelconque. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a \quad ; \quad u_{n+1} = \mathrm{e}^{2u_n} - \mathrm{e}^{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On remarquera que cette égalité peut aussi s'écrire :

$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{u_n} \cdot (\mathrm{e}^{u_n} - 1).$$

On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - x$$

1. Calculer $g'(x)$ et prouver que, pour tout réel x :
$g'(x) = (\mathrm{e}^x - 1)(2 \cdot \mathrm{e}^x + 1)$

2. Déterminer les variations de la fonction g et donner la valeur de son minimum.

3. En remarquant que $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 6908

 BY-NC

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n{}^2+1\right)$$

On admet que la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right)$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0;1]$.

2. Etudier les variations de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité :
   $$f(\ell) = \ell$$
   En déduire la valeur de ℓ.

 BY-NC