

Terminale S / Nombres complexes

1. Écriture algébrique d'un nombre complexe :

Exercice 6788

Sachant que $i^2 = -1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

- a. i^2 b. i^3 c. i^4 d. i^5
 e. i^{14} f. i^{100} g. i^{-1} h. i^{-3}

Exercice 3782

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

- a. $z_1 = 3 \cdot (2 - i) + i \cdot (3 + 2i)$ b. $z_2 = (5 + 2i) \cdot (1 - i)$
 c. $z_3 = -5i \cdot (5 - 4i) - 3i$ d. $z_4 = (5 + 2i)^2$
 e. $z_5 = (2 - i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i)^2$ f. $z_6 = (5 + 2i) \cdot (5 - 2i)$

Exercice 3788

Soit x un nombre réel. On considère le nombre complexe z défini par l'égalité :

$$z = (x + 2i) \cdot (1 - xi)$$

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z .
- Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un nombre réel?
 - Pour quelle(s) valeur(s) de x , z est un imaginaire pur?

Exercice 5310

- On considère le polynôme P définie sur \mathbb{C} par :

$$P = 2 \cdot z^3 + z^2 + 2 \cdot z + 1$$

Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont solutions

des racines du polynôme P :

$$z_1 = -i \quad ; \quad z_2 = i \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2}$$

- On considère le polynôme Q définie sur \mathbb{C} par :

$$Q = z^3 - 2 \cdot z^2 + 2 \cdot z$$

Vérifier que le nombre complexe $z_4 = 1 - i$ est une racine du polynôme Q .

Exercice 5133

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

- a. $z_1 = \frac{1+i}{i}$ b. $z_2 = \frac{1}{1-i}$ c. $z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$

Exercice 5327

Donner la valeur de $Re(z)$ et $Im(z)$ pour chacun des complexes ci-dessous :

- a. $z = (2+i)^2$ b. $z = \frac{3-4i}{1+i}$ c. $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$

Exercice 5309

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par :

$$z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = 5 - 2i$$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

- a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_1 - 2 \cdot z_2$
 d. $z_1 \cdot z_2$ e. $\frac{z_1}{z_2}$ f. $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$

2. Equations :

Exercice 5324

- Dans \mathbb{C} , on considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : z + 2 - i = (1 + i) \cdot z$$

Montrer que le nombre complexe $-1 - 2i$ est solution de l'équation (E) .

- Dans \mathbb{C} , on considère l'équation (F) définie par :

$$(F) : (z - 1 + 2i)(z + 2i) = z^2 - i$$

Montrer que le nombre complexe $-i$ est solution de l'équation (F) .

Exercice 3799

Dans \mathbb{C} , résoudre les équations du premier degré suivantes :

- a. $3 \cdot z + i \cdot z = 0$ b. $z + 2i \cdot z = i$
 c. $z + 2 - i \cdot (z + 1) = 0$ d. $\frac{z - 5}{z - i} = i$

Exercice 3817

Dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes :

1. Montrer que : $(1+i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation $(E) : z^2 = -8i$

3. Conjugué: définitions :**Exercice 5326**

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

4. Conjugué: propriétés algébriques :**Exercice 6789**

Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

- a. $z_1 = (1+i) \cdot (2-i)$; $z_2 = (1-i) \cdot (2+i)$
- b. $z_1 = \frac{i-3}{2+2i}$; $z_2 = \frac{-i-3}{2-2i}$
- c. $z_1 = (1-i)^5$; $z_2 = (1+i)^5$

Exercice 3824

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre z ;

5. Conjugué: équations :**Exercice 6790**

Déterminer les valeurs des réels a et b réalisant l'égalité suivante :

$$2a + b \cdot (2+i) - 3i = a \cdot (i-2) + b \cdot (1-2i)$$

6. Equations du second degré :**Exercice 3802**

Résoudre dans \mathbb{C} les équations du second degré suivantes :

- a. $z^2 - 3z + 4 = 0$
- b. $z^2 - 4z + 4 = 0$
- c. $3z^2 + 3z + 2 = 0$
- d. $z^2 - 4z - 1 = 0$

- a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E) .
 - b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous écriture algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de l'équation : $(E') : z^3 = -8i$

- a. $z = 1+i$
- b. $z = 2i-3$
- c. $z = i \cdot (1+2i)$
- d. $z = \frac{1}{i}$
- e. $z = \frac{2}{2-i}$
- f. $z = (1-i)(1+i)$

- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe \bar{z} .

- a. $z = (2-i)(5+3i)$
- b. $z = i \cdot (3+2i) - 3+i$
- c. $z = \frac{5-2i}{i-2}$
- d. $z = \frac{(3-2i)(1-i)}{1+i}$

Exercice 5333

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 :

$$z_1 = \frac{3-2i}{1+i} ; z_2 = \frac{3+2i}{1-i}$$

1. Que peut-on dire des nombres complexes z_1 et z_2 ?
2. a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre z_1 .
- b. En déduire l'expression de z_1+z_2 et z_1-z_2 .

Exercice 3800

Résoudre les équations suivantes :

- a. $z + \bar{z} = 6$
- b. $z + \bar{z} = i$
- c. $z + 2\bar{z} = 8+i$
- d. $i\bar{z} + 2(z-5) = 0$

Exercice 3803

On considère la fonction complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \{2\}$ par la relation :

$$f: z \mapsto \frac{z-4}{z-2}$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par

Terminale S - Nombres complexes - <https://chingatome.fr>

cette fonction.

Exercice 5331



On considère dans \mathbb{C} l'équation :

$$(E) : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0$$

- Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(E) : (z - 2)(z^2 + az + b) = 0$$

- Résoudre l'équation (E) .

Exercice 6781



Dans \mathbb{C} , on considère l'équation (\mathcal{E}_λ) dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$;

$$x^2 - 3x + 4 = \lambda$$

Pour quelles valeurs de λ , l'équation (\mathcal{E}_λ) admet deux solutions distinctes conjuguées.

Exercice 6811



On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$$

où a désigne un nombre réel quelconque.

Une seule des propositions suivante est exacte. Recopier la réponse choisie et justifier cette proposition

- Pour toute valeur de a , (E) n'a pas de solution dans \mathbb{C} .
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et elles sont conjuguées.
- Pour toute valeur de a , les solutions de (E) dans \mathbb{C} ne sont pas réelles et elles ne sont pas conjuguées.
- Il existe une valeur de a pour laquelle (E) admet au moins une solution réelle.

Exercice 6794



On donne le nombre complexe : $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation : $z^2 + z + 1 = 0$
- Démontrer les égalités suivantes :
 - $j^3 = 1$
 - $j^2 = -1 - j$
- On suppose l'existence de trois nombres complexes a , b et c vérifiant l'égalité : $a + j \cdot b + j^2 \cdot c = 0$
 - Démontrer l'égalité : $a - c = j \cdot (c - b)$
 - Démontrer l'égalité : $a - b = j^2 \cdot (b - c)$

7. Equations du second degré et changement de variables :

Exercice 6204



- Dans \mathbb{C} , on considère le polynôme : $z^2 + 6z + 25$. Déterminer ses racines.

- Donner l'écriture algébrique du nombre complexe a et b définis par :

$$a = (1 + 2i)^2 \quad ; \quad b = (1 - 2i)^2$$

- En déduire les solutions de l'équation :

$$z^4 + 6z^2 + 25 = 0$$

Exercice 5958



Pour tout nombre z , on pose : $P(z) = z^4 - 1$.

- Factoriser $P(z)$ en produit de facteurs du premier degré.
- En déduire les solutions dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes de l'équation $P(z) = 0$, d'inconnue z .
- Déduire de la question précédente les solutions dans \mathbb{C} de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z + 1}{z - 1} \right)^4 = 1$$

8. Equations et conjugués :

Exercice 3787



- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + x + 1 = 0$$

- On considère le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Déterminer l'écriture algébrique des deux nombres complexes : j^2 ; j^3

- Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants : $1 + j + j^2$; $1 + \bar{j} + \bar{j}^2$
- Dans \mathbb{C} , de quelle équation du second degré, les nombres j et \bar{j} sont-ils solutions ?
- Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel n : $(1 + j)^{2n+1} = -j^{n+2}$

9. Ensembles de solutions :


Exercice 6806 

On considère les trois ensembles, définis ci-dessous, de couples de réels :

- $\mathcal{E}_1 = \{(x; y) \mid 2 \cdot x + y - 1 = 0\}$
- $\mathcal{E}_2 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 4 = 0\}$
- $\mathcal{E}_3 = \{(x; y) \mid x \cdot y + 2 \cdot y = 0\}$

On considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O; I; J)$. Donner pour chacun des trois ensembles ci-dessus :

- la nature de leur représentation dans le plan,
- des éléments caractérisants leur représentation.

Exercice 6776  



A tout nombre complexe z , on associe un nombre complexe z' défini par :

10. Module d'un nombre complexe :**Exercice 5345** 

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$z' = z^2 + 4 \cdot z + 3$$

Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des nombres complexes z tel que z' soit un nombre réel.

Exercice 6353  

Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Considérons l'ensemble \mathcal{E} des nombres complexes z vérifiant : $\frac{1}{z^2+1}$ soit un réel.

L'ensemble \mathcal{E} est :

1. l'ensemble des nombres réels ;
2. l'ensemble des imaginaires purs privé de i et de $-i$;
3. la réunion de l'ensemble des nombres réels et de l'ensemble des imaginaires purs privé de i et $-i$;
4. le nombre 0.

11. Module: propriétés algébriques :**Exercice 3846** 

1. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul :
$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{\left(z^2 - 1\right)} = -\bar{z}^2 \cdot \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$$
2. Pour tout nombre complexe z , on définit le nombre complexe z' par :

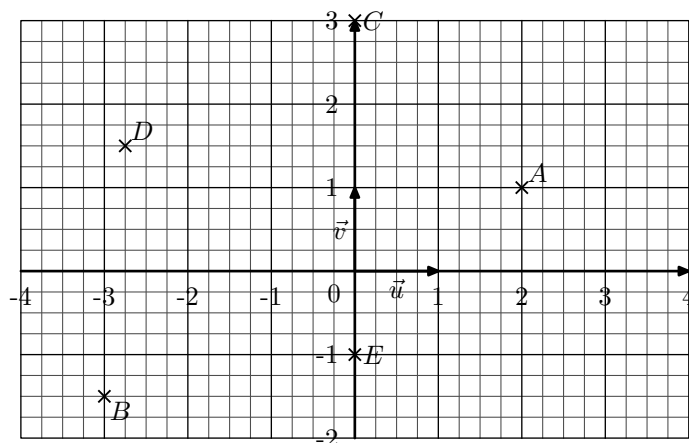
- | | | |
|-------------------------------|---|---|
| a. $1 - 2 \cdot i$ | b. $-5 \cdot i$ | c. $(3 - 2 \cdot i)(2 + i)$ |
| d. $-i \cdot (1 - 2 \cdot i)$ | e. $\frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot i}$ | f. $\frac{3 - i \cdot \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$ |

$$z' = \frac{(3 + 4 \cdot i) \cdot z + 5 \cdot \bar{z}}{6}$$

- a. Pour tout nombre complexe z , établir l'égalité :
$$\frac{z' - z}{1 + 2 \cdot i} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \cdot \frac{z - \bar{z}}{3}$$
- b. En déduire que le nombre $\frac{z' - z}{1 + 2 \cdot i}$ est un nombre réel.

12. Représentation graphique :**Exercice 3784** 

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et les cinq points représentés ci-dessous :



1. Déterminer les écritures algébriques des affixes des points A, B, C, D, E .

2. Placer dans le plan les points F, G, H et I d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4 définies par :

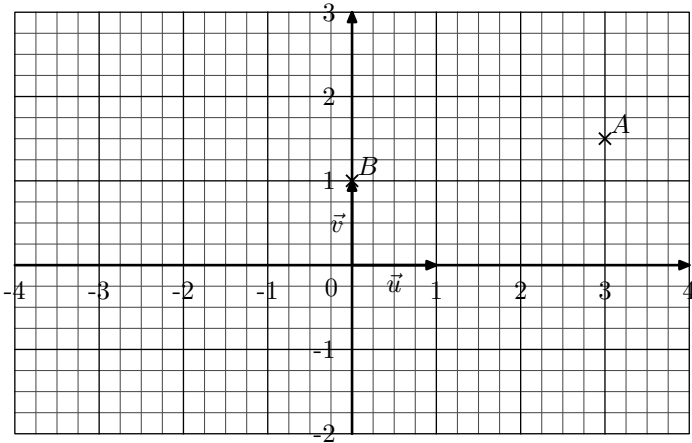
$$z_1 = 3 - i \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2} \cdot i$$

$$z_3 = -\frac{7}{4} + 2 \cdot i \quad ; \quad z_4 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot i$$

3. Déterminer l'affixe du milieu du segment $[EF]$.

Exercice 3785 

On considère le plan muni d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ainsi que les points A et B représentés ci-dessous :



On note z_A et z_B les affixes respectives des points A et B .

1. Donner les écritures algébriques des affixes des points A, B .

2. a. Placer le point C d'affixe $-z_A$.
 b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en C ?

3. a. Placer le point D d'affixe $\overline{z_A}$.
 b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en D ?

4. a. Placer le point E d'affixe $-\overline{z_A}$.
 b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en E ?

5. a. Placer le point F d'affixe $\frac{1}{2} \cdot z_A$.
 b. Que peut-on dire de la position du point F ?

6. a. Placer le point G d'affixe $z_A + (-2 - 2 \cdot i)$.
 b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point A en G ?

7. On considère le point H d'affixe z_H vérifiant l'égalité :

$$z_H - z_B = \frac{1}{2} \cdot (z_A - z_B)$$

a. En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe z_H du point H .
 b. Que peut-on de la position du point H ?

Exercice 6797 

On considère la fonction f définie sur \mathbb{C} par la relation :

$$f(z) = z + \overline{z}^2$$

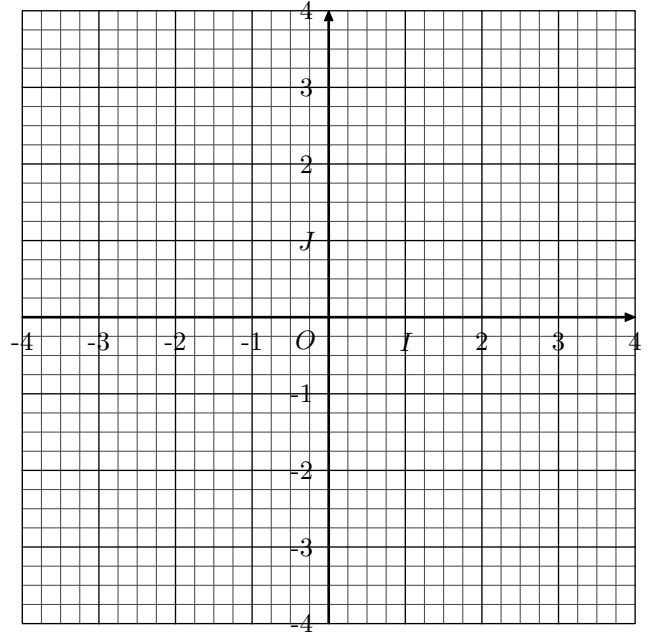
1. Notons a et b les nombres réels tels que z admettent pour écriture algébrique $z = a + i \cdot b$.


Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $f(z)$.

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble \mathcal{E} des nombres complexes z tels que $f(z)$ est un réel. C'est à dire :

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[f(z)] = 0\}$$

- a. Soit z un nombre complexe appartenant à \mathcal{E} . Déterminer l'ensemble \mathcal{E} .
- b. Représenter, dans le plan complexe ci-dessous et en rouge, l'ensemble \mathcal{E} .

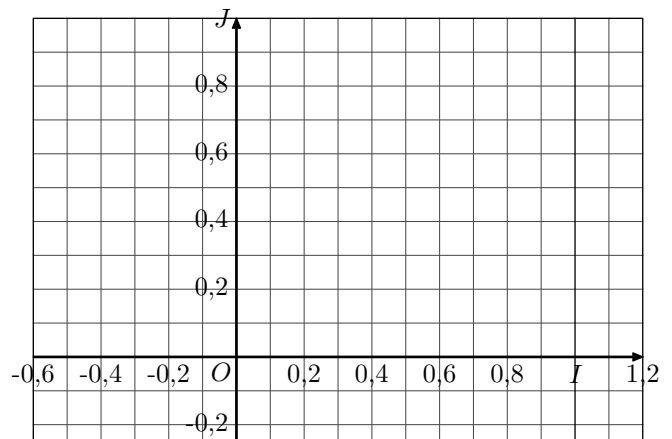


Exercice 6792 

On munit le plan complexe d'un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On définit la suite (z_n) de nombres complexes par :

$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i\right) \cdot z_n$$

- 1. Déterminer l'écriture algébrique des quatre premiers termes de la suite (z_n) .
- 2. A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'écriture algébrique des termes z_4 et z_5 .
- 3. Pour tout entier naturel n , on note M_n les images du nombre complexe z_n .
 a. Placer les points M_0, \dots, M_5 dans le repère ci-dessous :



b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des triangles OM_0M_1, OM_1M_2 , et OM_2M_3 ?

13. Géométrie et module :

Exercice 3815



On considère les points B et C d'affixes respectives $-i$ et $7i$.

Montrer que tout point M d'affixe z vérifiant :

$$z = 3i + 4e^{i\theta} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

appartient au cercle \mathcal{C} de diamètre $[BC]$.

Exercice 3813



Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - i\sqrt{3}$$

1. Etablir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient :
$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$
est un cercle de centre Ω d'affixe -2 . Préciser son rayon. Construire Γ_2 .
2. Vérifier que les points A et B sont des éléments de Γ_2

14. Modules et équations cartésiennes :

Exercice 3844



Soit z un nombre complexe, on considère les relations suivantes :

$$(E) : |z - 2 + i| = 5 \quad ; \quad (F) : |z + i| = |z + 1 - 2i|$$

1. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (E) est un cercle. Préciser son centre et son rayon.

- b. Soit $a+ib$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E) .
2. a. Justifier que l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la relation (F) est une droite. Préciser sa nature.
- b. Soit $a+ib$ l'écriture algébrique de l'affixe du point M ; déterminer une relation sur a et b caractérisant la relation (E) .