Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminale S/Nombres complexes et arguments

1. Rappel de trigonométrie :

Exercice 3792

Soit α un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

a. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ b. $\sin\left(\alpha+3\cdot\pi\right)$

c. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Exercice 3793

Résoudre les équations suivantes :

a. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 5947

1. En remarquant l'égalité $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.
2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 3794

1. a. Développer l'expression : $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

   b. Résoudre l'équation : $\sin x+\cos x=1$
2. a. Développer l'expression : $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

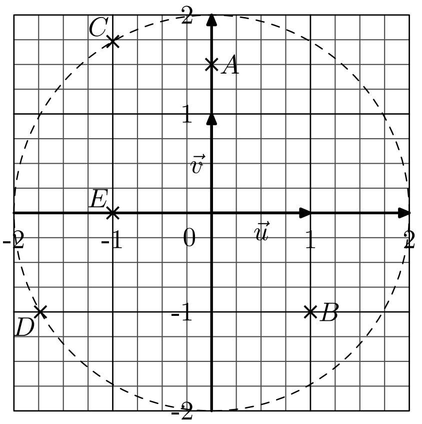
   b. Résoudre l'équation : $\cos x-\sqrt{3}\cdot\sin x=1$

2. Ecriture trigonométrique :

Exercice 3795

On considère le plan muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthormé direct représenté ci-dessous :

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2 est représenté en pointillé ; les points C et D appartiennent au cercle $\mathscr{C}$.



1. Déterminer les modules et les arguments des affixes des points A, B, C, D et E.
2. Placer les points F et G d'affixes respectives z et z' vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Exercice 5952

Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

a. $z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-\mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b. $z_2 = -3\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

c. $z_3 = \cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

d. $z_4 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

3. Ecriture trigonométrique et opérations :

Exercice 5951

On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.

2. Montrer que le nombre complexe $z{\cdot}z'$ est un nombre complexe de module $(r\cdot r')$ et d'argument $(\theta{+}\theta')$.

3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta{-}\theta')$.

4. Ecriture trigonométrique et géométrie :

Exercice 5359

On considère le plan muni du repère $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$ et les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A=-2+\text{i} \quad ; \quad z_B=-3{\cdot}\text{i} \quad ; \quad z_C=3-2{\cdot}\text{i} \quad ; \quad z_D=3+2{\cdot}i$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :
$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du complexe Z.

2. a. Justifier que le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
   b. Le quadrilatère $ABCD$ est-il un losange?

Exercice 5358

On considère le plan muni du repère $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$ et les trois points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A=1-2{\cdot}\text{i} \quad ; \quad z_B=-3-4{\cdot}\text{i} \quad ; \quad z_C=-2\sqrt{3}-\text{i}{\cdot}\sqrt{3}$$

1. a. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe Z défini par le quotient :
$$Z=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$$
   b. En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe Z.

2. a. Déduire des questions précédentes que le triangle ABC est un triangle isocèle en A.
   b. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 4105

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$, on considère les points M et M' distincts de O d'affixes respectives z et z'. On pose :

$$z=x+\text{i}{\cdot}y \quad ; \quad z'=x'+\text{i}{\cdot}y'$$

où x, x', y, y' sont des nombres réels.

On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.

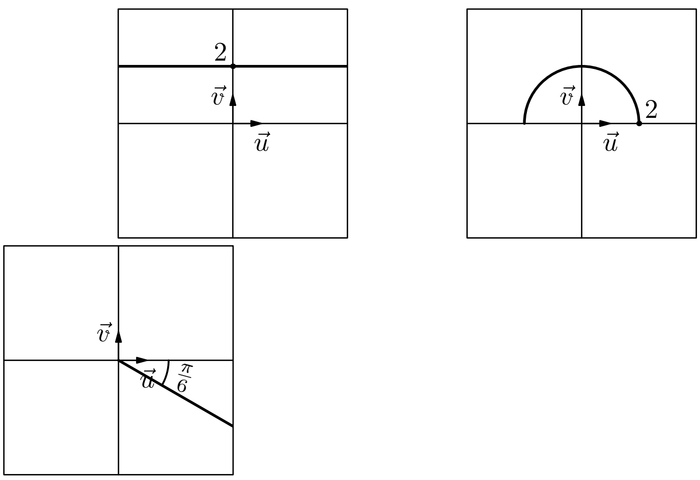
1. Exprimer le complexe $\overline{z}{\cdot}z'$ en fonction de x, x', y, y'.

2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $Re\big(z'{\cdot}\overline{z}\big)=0$.
   b. Montrer que les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $Im(z'{\cdot}\overline{z})=0$

5. Module, argument et géométrie :

Exercice 5380

Décrire, à l'aide de l'écriture algébrique ou de l'écriture exponentielle, des parties du plan représentées ci-dessous :



Exercice 3796

On considère le plan muni d'un repère $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$ orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie les conditions suivantes :

a. $|z|=1$ b. $|z|\leqslant 3$ c. $1\leqslant|z|\leqslant 2$

d. $\arg(z)=\dfrac{\pi}{2}$ e. $\big|\arg(z)\big|=\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 4320

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\big(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\big)$. On prendra $2\,cm$ pour unité graphique. On appelle J le point d'affixe i.

1. On considère les points A, B, C, H d'affixes respectives :
$$a=-3-\text{i} \quad ; \quad b=-2+4{\cdot}\text{i} \quad ; \quad c=3-\text{i} \quad ; \quad h=-2.$$
Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que J est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC. Préciser le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe $\dfrac{b-c}{h-a}$.
En déduire que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 3854

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_A=-\sqrt{3}-\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=1-\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$
$$z_C=\sqrt{3}+\mathrm{i} \quad ; \quad z_D=-1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}$$

1. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.

2. Construire à la règle et au compas les points A, B , C et D *(on prendra pour unité graphique 2 cm)*.

3. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\dfrac{z_A}{z_B}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 3875

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives :
$z_A=\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=2+2\cdot\mathrm{i}$

1. Soit I un point du plan dont l'affixe z_I vaut :
$$z_I=-4+\frac{23}{2}\cdot\mathrm{i}$$
Montrer que le point I appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

2. Soit M un point du plan d'affixe $(2+\mathrm{i})$.
Montrer que le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

6. Ecritures exponentielles :

Exercice 3848

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z_1=5$ b. $z_2=-3$ c. $z_3=-3\cdot\mathrm{i}$

d. $z_4=-3+3\cdot\mathrm{i}$ e. $z_5=-2\sqrt{3}-2\cdot\mathrm{i}$ f. $z_6=\sqrt{3}-3\cdot\mathrm{i}$

Exercice 5366

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :
$$z_1=\sqrt{3}\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z_2=\sqrt{6}\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6}}$$
Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $\dfrac{z_1}{z_2}$ c. z_1+z_2

Exercice 3831

1. Soit z un nombre complexe admettant la forme exponentielle :
$z=r\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$, $\theta\in\mathbb{R}$
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :
a. $\overline{z}$ b. $-z$

2. a. Justifier l'égalité suivante : $3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}=-3\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}$
b. En déduire l'écriture exponentielle de :
$2\cdot e^{-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}+3\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 3798

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z défini par $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$

2. a. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants : $z_1=1-\mathrm{i} \quad ; \quad z_2=1+\mathrm{i}$
b. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe z.

3. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe z_3 définie par : $z_3=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\cdot\mathrm{i}}$

Exercice 4253

Dans $\mathbb{C}$, on considère les deux nombres complexes suivants :
$z_A=1-\mathrm{i} \quad ; \quad z_B=2+\sqrt{3}+\mathrm{i}$

1. Déterminer le module et un argument de z_A.

2. Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous écriture algébrique.

3. Montrer que : $\dfrac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}}$

4. En déduire l'écriture exponentielle de z_B.

Exercice 3827

On considère dans $\mathbb{C}$ les nombres complexes z_1 et z_2 de module 1 et d'arguments respectifs α et β. Montrer que :
$\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1\cdot z_2}$ est un réel positif ou nul.

Exercice 6380

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :
$z_0=\sqrt{3}-\mathrm{i} \quad ; \quad z_{n+1}=(1+\mathrm{i})\cdot z_n$ pourt tout $n\in\mathbb{N}$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et $1+\mathrm{i}$.
En déduire la forme exponentielle de z_1.

3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

7. Ecriture exponentielle et mesure principale de l'argument :

Exercice 5381

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme trigonométrique :

$z_1 = 2\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}$; $z_2 = 3\cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{4}}$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a. $z_1\cdot z_2$ b. $(z_1)^2\cdot z_2$ c. $\dfrac{z_2}{(z_1)^3}$

Exercice 3829

1. a. Soit z_1 le nombre complexe admettant pour écriture algébrique : $z_1 = -2\cdot\sqrt{3}+2\cdot i$
   Déterminer l'écrituer exponentielle de ce nombre.
   b. Soit z_2 le nombre complexe vérifiant :
   $|z_2| = \sqrt{2}$; $\arg(z_2) = \dfrac{3}{4}\cdot\pi$
   Déterminer l'écriture algébrique du complexe z_2
2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
   a. $z_1 \cdot z_2$ b. $z_1 + z_2$

Exercice 6081

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère l'application z de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$f : z \longmapsto z^2$.

On considère le complexe : $a = \sqrt{2} - i\cdot\sqrt{2}$

1. Exprimer a sous écriture exponentielle.
2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre a par f.

Exercice 3810

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
   $z^2 - 2z + 4 = 0$
   Les solutions seront notées z et z', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.
   Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle des solutions de cette équation.
2. Donner l'écriture exponentielle exacte du nombre complexe $(z')^{2\,004}$, puis son écriture algébrique.

Exercice 5325

On considère le nombre complexe : $a = (-\sqrt{3}+i)^{2011}$.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse :

"*Le nombre complexe a est un nombre imaginaire pur.*"

9. Transformations du plan :

Exercice 6020

A tout nombre complexe z tel que $z\neq 2$, on associe le nombre complexe z' définie par :

$z' = \dfrac{z+3}{z-1}$

1. On note $x+i\cdot y$, où $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, l'écriture algébrique du nombre complexe z.
   Donner l'écriture algébrique du nombre z', associé à z, en fonction de x et de y.
2. a. On considère l'équation cartésienne :
   $(E) : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
   Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle $\mathscr{C}$ de centre $(-1\,;0)$ et de rayon 2.
   b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre complexe z' associé soit un imaginaire pur.

Exercice 4078

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On note A le point d'affixe i.

Pour tout point M d'affixe z tel que $z\neq i$, on définit le point M' dont l'affixe z' est défini par :

$z' = \dfrac{1}{3\cdot(z-i)}$

1. Etablir la proposition suivante :
   Si M est un point du cercle de centre A de rayon r, alors M' est un point du cercle de centre O de rayon $\dfrac{1}{3\cdot r}$.
2. Démontrer que : $\arg(z') = -(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})$

Exercice 4099

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2). On définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe :

$z' = \dfrac{\overline{z}\cdot(z-2)}{\overline{z}-2}$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre complexe $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.

2. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\dfrac{z'+2}{z-2}$ est réel.

3. Montrer, pour tout point M du plan, que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

10. Suites :

Exercice 6381

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par :

$$z_0=\sqrt{3}-\mathrm{i} \quad ; \quad z_{n+1}=(1+\mathrm{i})\cdot z_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n=|z_n|$.

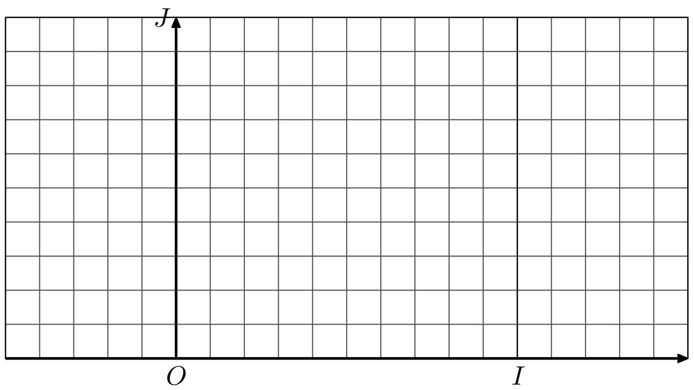
1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6384

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0=1 \quad ; \quad z_{n+1}=\Big(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z_n$$

1. Déterminer les affixes des poitns A_1 et A_2.
2. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
3. On admet que, pour tout entier naturel n :
$$z_n=|z_n|\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\cdot\pi}{6}}$$
Placer les point A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 dans le repère ci-dessous :

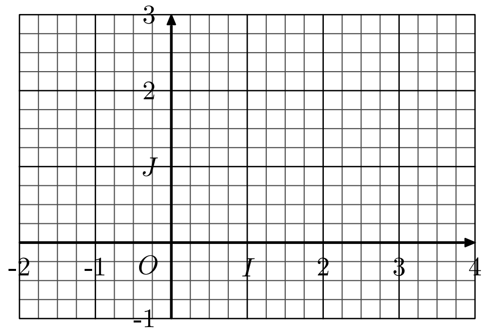


Exercice 6382

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définies par :

$$z_0=4 \quad ; \quad z_{n+1}=\frac{1+\mathrm{i}}{2}\cdot z_n \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on note A_n le point image du nombre complexe z_n.



1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.
   b. Placer les points A_1, A_2 et A_3 dans le repère ci-dessous.
2. On note ℓ_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant sucessivement par les points A_1, A_2, A_3...

   Ainsi : $\ell_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}A_{k-1}A_k=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{n-1}A_n$

   a. Etablir la relation ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $$A_{n-1}A_n=|z_n|$$
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n non-nul :
   $$A_{n-1}A_n=2\sqrt{2}\cdot\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{n-1}$$
   c. Donner une expression de ℓ_n en fonction de n.
   d. Déterminer la limite éventuelle de la suite (ℓ_n).