

# Terminale S / Nombres complexes et arguments

## 1. Rappel de trigonométrie :

### Exercice 3792

Soit  $\alpha$  un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes :

- a.  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$       b.  $\sin(\alpha + 3 \cdot \pi)$   
 c.  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$       d.  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

### Exercice 3793

Résoudre les équations suivantes :

- a.  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       b.  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### Exercice 5947

1. En remarquant l'égalité  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ , déterminer les valeurs de  $\cos\frac{\pi}{12}$  et  $\sin\frac{\pi}{12}$ .

2. Déterminer les valeurs de:  $\cos\frac{7\pi}{12}$  ;  $\sin\frac{7\pi}{12}$

### Exercice 3794

1. a. Développer l'expression:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ .

- b. Résoudre l'équation:  $\sin x + \cos x = 1$

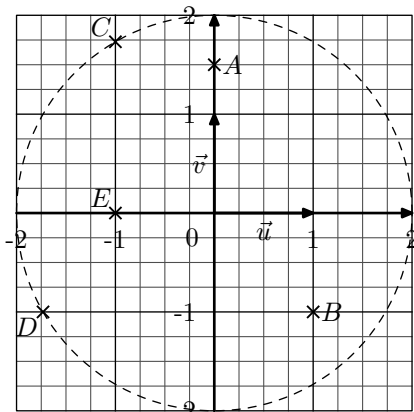
2. a. Développer l'expression:  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- b. Résoudre l'équation:  $\cos x - \sqrt{3} \cdot \sin x = 1$

## 2. Ecriture trigonométrique :

### Exercice 3795

On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthormé direct représenté ci-dessous :



Le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon 2 est représenté en pointillé; les points  $C$  et  $D$  appartiennent au cercle  $\mathcal{C}$ .

1. Déterminer les modules et les arguments des affixes des points  $A, B, C, D$  et  $E$ .

2. Placer les points  $F$  et  $G$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  vérifiant :

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \end{cases} ; \begin{cases} |z'| = 2 \\ \arg(z') = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

### Exercice 5952

Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

a.  $z_1 = 2 \cdot \left( \cos\frac{\pi}{4} - i \cdot \sin\frac{\pi}{4} \right)$

b.  $z_2 = -3 \cdot \left( \cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \right)$

c.  $z_3 = \cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

d.  $z_4 = 2 \cdot \left( \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{4} \right)$

## 3. Ecriture trigonométrique et opérations :

**Exercice 5951** 

On considère deux nombres complexes  $z$  et  $z'$  non-nuls de modules respectifs  $r$  et  $r'$  et d'arguments respectifs  $\theta$  et  $\theta'$ .

- Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes  $z$  et  $z'$ .

#### 4. Écriture trigonométrique et géométrie :

**Exercice 5359** 

On considère le plan muni du repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et les quatre points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives :

$$z_A = -2 + i \quad ; \quad z_B = -3 \cdot i \quad ; \quad z_C = 3 - 2 \cdot i \quad ; \quad z_D = 3 + 2 \cdot i$$

- Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $Z$  défini par le quotient :
 
$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$$
  - En déduire l'écriture trigonométrique du complexe  $Z$ .
- Justifier que le quadrilatère  $ABCD$  a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur.
  - Le quadrilatère  $ABCD$  est-il un losange?

**Exercice 5358** 

On considère le plan muni du repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et les trois points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$z_A = 1 - 2 \cdot i \quad ; \quad z_B = -3 - 4 \cdot i \quad ; \quad z_C = -2\sqrt{3} - i \cdot \sqrt{3}$$

- Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $Z$  défini par le quotient :

- Montrer que le nombre complexe  $z \cdot z'$  est un nombre complexe de module  $(r \cdot r')$  et d'argument  $(\theta + \theta')$ .

- Montrer que le nombre complexe  $\frac{z}{z'}$  est un nombre complexe de module  $\frac{r}{r'}$  et d'argument  $(\theta - \theta')$ .

$$Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

- En déduire l'écriture trigonométrique du nombre complexe  $Z$ .
- Déduire des questions précédentes que le triangle  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ .
  - Donner la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

**Exercice 4105**   

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M$  et  $M'$  distincts de  $O$  d'affixes respectives  $z$  et  $z'$ . On pose :


$$z = x + i \cdot y \quad ; \quad z' = x' + i \cdot y'$$

où  $x, x', y, y'$  sont des nombres réels.

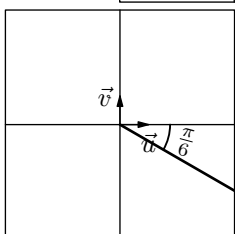
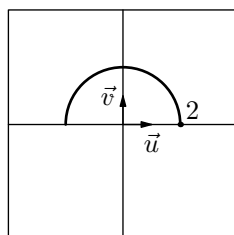
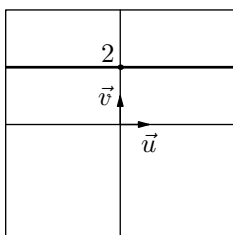
On rappelle que  $\bar{z}$  désigne le conjugué de  $z$  et que  $|z|$  désigne le module de  $z$ .

- Exprimer le complexe  $\bar{z} \cdot z'$  en fonction de  $x, x', y, y'$ .
- Montrer que les vecteurs  $\vec{OM}$  et  $\vec{OM}'$  sont orthogonaux si, et seulement si,  $Re(z' \cdot \bar{z}) = 0$ .
  - Montrer que les points  $O, M$  et  $M'$  sont alignés si, et seulement si,  $Im(z' \cdot \bar{z}) = 0$

#### 5. Module, argument et géométrie :



**Exercice 5380**  

Décrire, à l'aide de l'écriture algébrique ou de l'écriture exponentielle, des parties du plan représentées ci-dessous :

**Exercice 3796**  

On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  orthonormé direct. Décrire l'ensemble des points  $M$  du plan dont l'affixe  $z$  vérifie les conditions suivantes :

- $|z| = 1$
- $|z| \leq 3$
- $1 \leq |z| \leq 2$
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
- $|\arg(z)| = \frac{\pi}{4}$

**Exercice 4320**  

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On prendra  $2\text{cm}$  pour unité graphique. On appelle  $J$  le point d'affixe  $i$ .

- On considère les points  $A, B, C, H$  d'affixes respectives :
 
$$a = -3 - i \quad ; \quad b = -2 + 4 \cdot i \quad ; \quad c = 3 - i \quad ; \quad h = -2.$$

Placer ces points sur une figure, qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2. Montrer que  $J$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$  circonscrit au triangle  $ABC$ . Préciser le rayon du cercle  $\mathcal{C}$ .

3. Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $\frac{b-c}{h-a}$ .  
En déduire que les droites  $(AH)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 3854**  

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives :

$$z_A = -\sqrt{3} - i ; z_B = 1 - i \cdot \sqrt{3}$$

$$z_C = \sqrt{3} + i ; z_D = -1 + i \cdot \sqrt{3}$$

1. Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes  $z_A, z_B, z_C$  et  $z_D$ .
2. Construire à la règle et au compas les points  $A, B, C$  et  $D$  (on prendra pour unité graphique 2 cm).

6. Écritures exponentielles :

**Exercice 3848** 

Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

- |                           |                                   |                                 |
|---------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|
| a. $z_1 = 5$              | b. $z_2 = -3$                     | c. $z_3 = -3 \cdot i$           |
| d. $z_4 = -3 + 3 \cdot i$ | e. $z_5 = -2\sqrt{3} - 2 \cdot i$ | f. $z_6 = \sqrt{3} - 3 \cdot i$ |

**Exercice 5366** 

On considère les deux nombres complexes donnés ci-dessous :

$$z_1 = \sqrt{3} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} ; z_2 = \sqrt{6} \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{6}}$$

Déterminer une expression simplifiée des calculs suivants :

- |                    |                      |                |
|--------------------|----------------------|----------------|
| a. $z_1 \cdot z_2$ | b. $\frac{z_1}{z_2}$ | c. $z_1 + z_2$ |
|--------------------|----------------------|----------------|

**Exercice 3831** 

1. Soit  $z$  un nombre complexe admettant la forme exponentielle :  
 $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$

Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

- |              |         |
|--------------|---------|
| a. $\bar{z}$ | b. $-z$ |
|--------------|---------|

2. a. Justifier l'égalité suivante :  $3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}} = -3 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}$   
b. En déduire l'écriture exponentielle de :  
 $2 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}} + 3 \cdot e^{i \cdot \frac{2\pi}{3}}$

**Exercice 3798** 

1. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$  défini par  $z = \frac{1-i}{1+i}$
2. a. Donner l'écriture exponentielle des deux nombres complexes suivants :  $z_1 = 1-i$  ;  $z_2 = 1+i$

3. Déterminer le milieu du segment  $[AC]$ , celui du segment  $[BD]$ . Calculer le quotient  $\frac{z_A}{z_B}$ . En déduire la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

**Exercice 3875**  

On considère le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit  $A$  et  $B$  les points d'affixes respectives :  
 $z_A = i$  ;  $z_B = 2 + 2 \cdot i$

1. Soit  $I$  un point du plan dont l'affixe  $z_I$  vaut :  
 $z_I = -4 + \frac{23}{2} \cdot i$   
Montrer que le point  $I$  appartient à la médiatrice du segment  $[AB]$ .
2. Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $(2+i)$ .  
Montrer que le point  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$ .

b. En déduire l'écriture exponentielle du nombre complexe  $z$ .

3. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe  $z_3$  définie par :  $z_3 = \frac{1+i}{1-\sqrt{3} \cdot i}$

**Exercice 4253**  

Dans  $\mathbb{C}$ , on considère les deux nombres complexes suivants :  
 $z_A = 1 - i$  ;  $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$

1. Déterminer le module et un argument de  $z_A$ .
2. Ecrire  $\frac{z_B}{z_A}$  sous écriture algébrique.
3. Montrer que :  $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$
4. En déduire l'écriture exponentielle de  $z_B$ .

**Exercice 3827**  

On considère dans  $\mathbb{C}$  les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  de module 1 et d'arguments respectifs  $\alpha$  et  $\beta$ . Montrer que :  
 $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 \cdot z_2}$  est un réel positif ou nul.

**Exercice 6380**  

On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par :  
 $z_0 = \sqrt{3} - i$  ;  $z_{n+1} = (1 + i) \cdot z_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
2. Déterminer la forme exponentielle de  $z_0$  et  $1+i$ .  
En déduire la forme exponentielle de  $z_1$ .
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

## 7. Écriture exponentielle et mesure principale de l'argument :

### Exercice 5381

On considère les deux nombres complexes suivants donnés sous leur forme trigonométrique :

$$z_1 = 2 \cdot e^{i \frac{2\pi}{3}} \quad ; \quad z_2 = 3 \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}}$$

Donner l'écriture exponentielle des expressions suivantes :

a.  $z_1 \cdot z_2$       b.  $(z_1)^2 \cdot z_2$       c.  $\frac{z_2}{(z_1)^3}$

### Exercice 3829

1. a. Soit  $z_1$  le nombre complexe admettant pour écriture algébrique :  $z_1 = -2 \cdot \sqrt{3} + 2i$   
Déterminer l'écriture exponentielle de ce nombre.
- b. Soit  $z_2$  le nombre complexe vérifiant :  
 $|z_2| = \sqrt{2}$  ;  $\arg(z_2) = \frac{3}{4} \cdot \pi$   
Déterminer l'écriture algébrique du complexe  $z_2$
2. Déterminer, à votre convenance, soit l'écriture algébrique, soit l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :
  - a.  $z_1 \cdot z_2$
  - b.  $z_1 + z_2$

### Exercice 6081

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct

## 9. Transformations du plan :

### Exercice 6020

A tout nombre complexe  $z$  tel que  $z \neq 2$ , on associe le nombre complexe  $z'$  défini par :

$$z' = \frac{z + 3}{z - 1}$$

1. On note  $x + iy$ , où  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .  
Donner l'écriture algébrique du nombre  $z'$ , associé à  $z$ , en fonction de  $x$  et de  $y$ .
2. a. On considère l'équation cartésienne :  
(E) :  $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$   
Justifier que, dans le plan, l'ensemble des solutions de (E) est le cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $(-1; 0)$  et de rayon 2.
- b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que le nombre complexe  $z'$  associé soit un imaginaire pur.

### Exercice 4078

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On note  $A$  le point d'affixe  $i$ .

$(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère l'application  $z$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  définie par :

$$f : z \mapsto z^2.$$

On considère le complexe :  $a = \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$

1. Exprimer  $a$  sous écriture exponentielle.
2. En déduire les nombres complexes antécédents du nombre  $a$  par  $f$ .

### Exercice 3810

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :  
 $z^2 - 2z + 4 = 0$

Les solutions seront notées  $z$  et  $z'$ ,  $z'$  désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.  
Donner l'écriture algébrique puis l'écriture exponentielle des solutions de cette équation.

2. Donner l'écriture exponentielle exacte du nombre complexe  $(z')^{2004}$ , puis son écriture algébrique.

### Exercice 5325

On considère le nombre complexe :  $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$ .

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fautive en justifiant la réponse :

"Le nombre complexe  $a$  est un nombre imaginaire pur."

Pour tout point  $M$  d'affixe  $z$  tel que  $z \neq i$ , on définit le point  $M'$  dont l'affixe  $z'$  est défini par :

$$z' = \frac{1}{3 \cdot (z - i)}$$

1. Etablir la proposition suivante :

*Si  $M$  est un point du cercle de centre  $A$  de rayon  $r$ , alors  $M'$  est un point du cercle de centre  $O$  de rayon  $\frac{1}{3 \cdot r}$ .*

2. Démontrer que :  $\arg(z') = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$

### Exercice 4099

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives 2 et  $(-2)$ . On définit l'application  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  et différent de  $A$  associe le point  $M'$  d'affixe :

$$z' = \frac{\bar{z} \cdot (z - 2)}{\bar{z} - 2}$$

1. Montrer que pour tout nombre complexe  $z$ , le nombre complexe  $(z - 2)(\bar{z} - 2)$  est réel.

2. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2,  $\frac{z'+2}{z-2}$  est réel.

3. Montrer, pour tout point  $M$  du plan, que les droites  $(AM)$  et  $(BM')$  sont parallèles.

## 10. Suites :

### Exercice 6381



On considère la suite de nombres complexes  $(z_n)$  définie par :

$$z_0 = \sqrt{3} - i ; z_{n+1} = (1 + i) \cdot z_n$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose:  $u_n = |z_n|$ .

- Calculer  $u_0$ .
- Démontrer que  $(u_n)$  est la suite géométrique de raison  $\sqrt{2}$  et de premier terme 2.
- Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 6384



Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

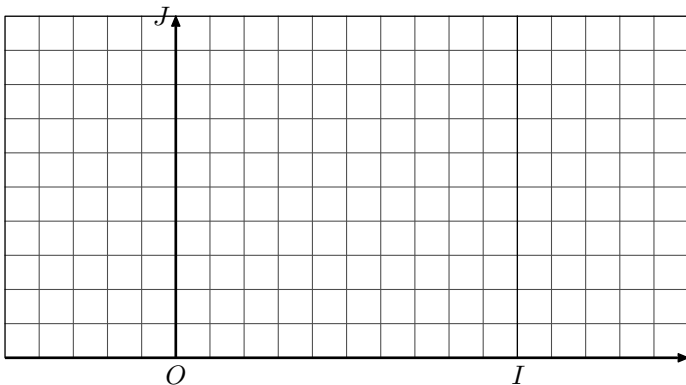
Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  le point d'affixe  $z_n$  défini par :

$$z_0 = 1 ; z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) \cdot z_n$$

- Déterminer les affixes des points  $A_1$  et  $A_2$ .
- Démontrer que le triangle  $OA_nA_{n+1}$  est rectangle en  $A_{n+1}$ .
- On admet que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$z_n = |z_n| \cdot e^{i \frac{n \cdot \pi}{6}}$$

Placer les points  $A_0, A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  dans le repère ci-dessous :



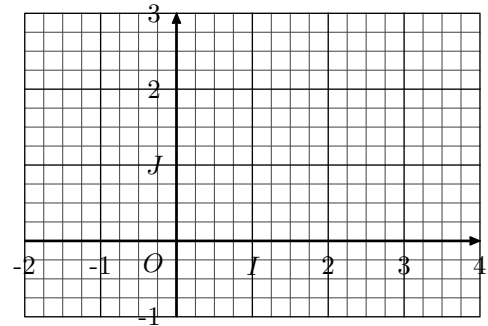
### Exercice 6382



On considère la suite  $(z_n)$  de nombres complexes définies par :

$$z_0 = 4 ; z_{n+1} = \frac{1+i}{2} \cdot z_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on note  $A_n$  le point image du nombre complexe  $z_n$ .



- Calculer  $z_1, z_2$  et  $z_3$ .
  - Placer les points  $A_1, A_2$  et  $A_3$  dans le repère ci-dessous.
- On note  $\ell_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$

$$\text{Ainsi: } \ell_n = \sum_{k=1}^n A_{k-1}A_k = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$$

- Etablir la relation ci-dessous pour tout entier naturel  $n$  non-nul :  

$$A_{n-1}A_n = |z_n|$$
- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  non-nul :  

$$A_{n-1}A_n = 2\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$
- Donner une expression de  $\ell_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(\ell_n)$ .