Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

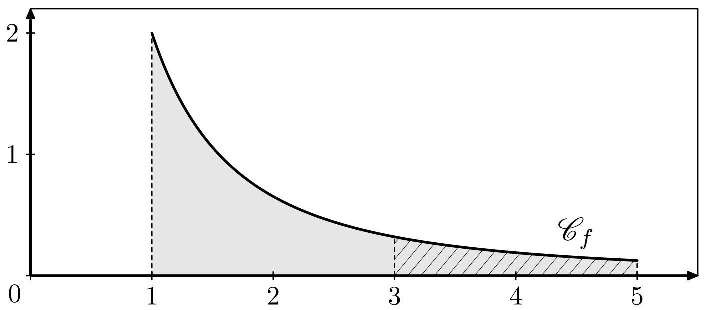
Terminale S/Loi continue à densité

1. Introduction :

Exercice 4208

On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f d éfinie sur l'intervalle $[1\,;5]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{32}{(3x+1)^2}$$



On considère un jeu de lancer de fléchettes se basant sur la surface grisée définie par :

- l'axe des abscisse et la courbe $\mathscr{C}_f$;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

En supposant qu'à chaque lancer, la fléchette tombe dans cette partie grisée, on souhaite connaître la probabilité que la fléchette atteigne la zone hachurée limitée par les deux droites $x=3$ et $x=5$.

Pour cela, on considère la variable aléaoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque fléchette lancée l'abscisse de son point de reception sur la cible.

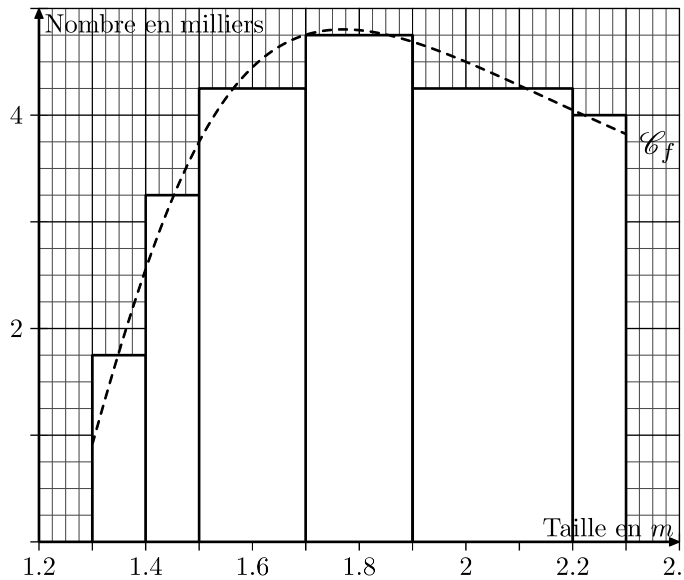
1. Déterminer la primitive de la fonction f.
2. Déterminer les valeurs des deux intégrales suivantes :
$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. En déduire la probabilité : $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant5)$

Exercice 4056

1. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un entier dans l'intervalle $[0\,;10]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$
2. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un entier dans l'intervalle $[0\,;999]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$
3. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un réel l'intervalle $[0\,;10]$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=5)$
4. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire choisissant de façon équiprobable un réel dans l'intervalle $[0\,;10[$.
Déterminer la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\in[0\,;5[)$

Exercice 6407

Une étude statistique porte sur la taille de plant de maïs :



Toutes les valeurs approchées demandées dans cet exercice seront approchées au centième près.

1. **A partir d'un histogramme :**

Les relevés ont permis d'établir l'histogramme ci-dessus.

a. Combien de plant dont la taille est comprise entre $1{,}9\,m$ et $2{,}2\,m$ comprend cette étude?

b. En choisissant un plant au hasard parmi les plants de maïs de cette étude, quelle est la probabilité que ce plant est une taille est comprise entre $1{,}9\,m$ et $2{,}2\,m$?

2. **A partir de la courbe :**

On choisit d'utiliser une courbe représentant "grossièrement" l'histogramme. L'expression de cette fonction est :
$$f(x) = \frac{15\cdot(4\cdot x-5)}{12\cdot x^2-30\cdot x+22}$$

a. Déterminer une primitive de la fonction f.

b. Déterminer la valeur approchée de : $\displaystyle\int_{1,3}^{2,3} f(x)\,\mathrm{d}x$

On considère la variable aléatoire continue $\mathcal{X}$ qui à un plant de maïs pris au hasard dans le champ d'étude associe sa taille.

(c.) Déterminer la valeur approchée de la probabilité : $\mathcal{P}(1{,}9\leqslant\mathcal{X}\leqslant2{,}2)$.

(d.) Existe-t-il une fonction g telle que pour tout couple de réel $(a\,;b)$ vérifiant $a<b$, on ait :

$$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si oui, donner une expression de cette fonction?

Exercice 6892

Lors du recensement de la population de 2013, la France comptait 66 millions de personnes. Pour cet exercice, on fait la supposition *(absurde)* que les tailles *(en m)* des français sont équitablement réparties sur l'intervalle $\big[1{,}4\,;1{,}9\big]$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une personne au hasard dans la population française et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui retourne la taille de la personne sélectionnée.

Déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\big(1{,}4\leqslant\mathcal{X}\leqslant1{,}65\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant1{,}6\big)$

c. $\mathcal{P}\big(1{,}4\leqslant\mathcal{X}\leqslant1{,}9\big)$ d. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}=1{,}6783453\big)$

2. Exemple de loi continue :

Exercice 4218

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{40}\cdot x + \dfrac{1}{5} & \text{pour } x\in\big[0\,;4\big] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f définie une loi à densité sur l'intervalle $\big[0\,;4\big]$.

2. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie sur $\big[0\,;4\big]$ dont la loi de probabilité a pour densité f. Déterminer les probabilités suivantes :

(a.) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)$ (b.) $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$ (c.) $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{2}\leqslant\mathcal{X}<3\Big)$

Exercice 4220

Pour la question suivante, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer la réponse exacte ; aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
$f(x)=x+m$ où m est une constante réelle.

f est une densité de probabilité sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ lorsque :

a. $m=-1$ b. $m=\dfrac{1}{2}$ c. $m=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ d. $m=\mathrm{e}^{-1}$

3. Loi uniforme :

Exercice 4216

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée :

Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\big[0\,;1\big]$, alors $\mathcal{P}\big(0{,}1\leqslant\mathcal{X}\leqslant0{,}6\big)=0{,}6$

Exercice 5466

Tout le personnel d'un hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $\big[0\,;1\big]$.

On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min?

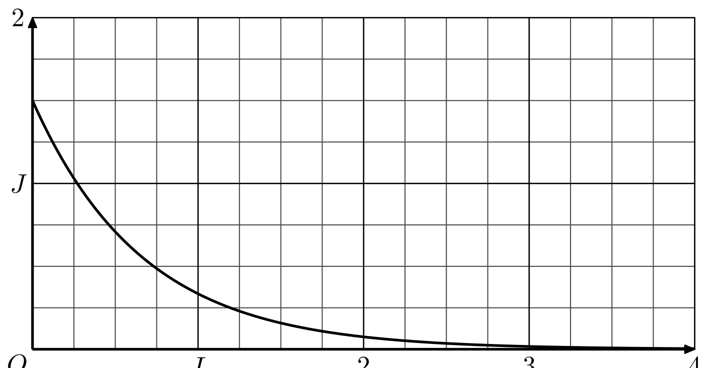
4. Loi exponentielle :

Exercice 4166

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. On rappelle que :

$$P(\mathcal{X}\leqslant a) = \int_0^a \lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$

La courbe donnée ci-dessous représente la fonction densité associée :



1. Interpréter sur le graphique la probabilité $P(\mathcal{X}\leqslant 1)$.

2. Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

Exercice 4171

On note $\mathcal{X}$ une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=0{,}04$.

On rappelle que pour tout réel t positif, la probabilité de l'évènement $(\mathcal{X}\leqslant t)$, notée $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t)$, est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$$

Déterminer la valeur approchée de $\mathcal{P}(\mathcal{X}>5)$ à 10^{-2} près par excès.

5. Loi exponentielle et espérance :

Exercice 6958

Un astronome effectue des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il modélise ensuite ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda=0{,}2$.

L'astronome a prévu d'observer le ciel pendant deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

6. Loi exponentielle et recherche du paramètre :

Exercice 4190

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda>0$.

Ainsi, on a la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t)=\displaystyle\int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx$

Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}>6)$ soit égale à $0{,}3$.

8. Loi exponentielle et durée de vie sans vieillissement :

Exercice 4154

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant une entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. A chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On suppose que $n=1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complétement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi, pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant k) = \int_0^k 0{,}01\cdot e^{-0{,}01\cdot x}\,dx$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle :

1. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant 50)$.

2. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : "*le joueur a tiré au maximum* 60 *boules pour tirer une boule blanche*" sachant que l'évènement "*le joueur a tiré plus de* 50 *boules pour tirer une boule blanche*".

Exercice 4149

La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$

On rappelle que pour tout $t>0$, la probabilité de l'évènement $(\mathcal{X}\leqslant t)$ est donnée par :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}\,dx \quad (\textit{avec } \lambda=0{,}07)$$

Sans justification, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.

- **Proposition 1 :** la probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.
- **Proposition 2 :** sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à 0,5 à 10^{-2} près.

Exercice 6263

Un restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.
On rappelle que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ est égale à $\frac{1}{\lambda}$.
Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.
3. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table? On arrondira à 10^{-4}.

9. Loi normale centrée réduite :

Exercice 5468

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

1. A l'aide de la calculatrice de la calculatrice, déterminer les valeurs approchées au millième des intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ b. $\int_{-2}^{2} f(t)\,dt$ c. $\int_{-3}^{3} f(t)\,dt$

d. $\int_{-4}^{4} f(t)\,dt$ e. $\int_{-5}^{5} f(t)\,dt$ f. $\int_{-9}^{9} f(t)\,dt$

2. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

Exercice 5467

On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0\,;1)$. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilité suivantes arrodies au millième :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant -1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant 1)$

Exercice 2654

On considère une variable aléatoire suivant une loi de probabilité $\mathcal{N}(0\,;1)$. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilités suivantes arrondies au millième :

a. $\mathcal{P}(-2 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 3)$ b. $\mathcal{P}(0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(-4 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 4)$

Exercice 5471

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale centrée réduite $(\mathcal{N}(0\,;1))$. On donne la valeur approchée de la probabilité suivante :

$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{X} \leqslant \frac{1}{2}\Big) \approx 0{,}691$$

Sans la calculatrice, déterminer la valeur des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\Big(0 \leqslant \mathcal{X} \leqslant \frac{1}{2}\Big)$ b. $\mathcal{P}\Big(-\frac{1}{2} \leqslant \mathcal{X} \leqslant 0\Big)$ c. $\mathcal{P}\Big(\mathcal{X} \leqslant -\frac{1}{2}\Big)$

Exercice 7580

On considère la variable aléatoire centrée et réduite $(\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0\ 1))$. Quelle est la probabilité que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ ait une valeur inférieure à 0,5 sachant qu'elle a une valeur inférieure à 2?

- 0,706
- 0,707
- 0,708
- 0,709

10. Loi normale inverse centrée réduite :

Exercice 5469

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Pour chaque question et à l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur de a approchée au millième vérifiant les égalités :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}3$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}5$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant a) = 0{,}68$

11. Loi normale et loi normale centrée réduite :

Exercice 5483

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre μ et σ^2 $(\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(\mu\,;\sigma^2))$. On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $(\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1))$.

En centrant et en réduisant la variable aléaoitre $\mathcal{X}$, établir l'égalité :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant \mu) = 0{,}5$$

Exercice 5478

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres 3 et 4 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(3\,;4))$ et $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $(\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0\,;1))$

1. Exprimer les probabilités ci-dessous en fonction de la variable aléatoire $\mathcal{Z}$:

   a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 2\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}<-2\big)$ c. $\mathcal{P}\big(-2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 3\big)$

2. A l'aide du tableau ci-dessous et en laissant les traces de votre démarche, déterminer les probabilités de la question 1..

t_1 \ t_2	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20
-3,00	0,0013	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026
-2,75	0,003	0,0035	0,004	0,0047	0,0054
-2,50	0,0062	0,0071	0,0082	0,0094	0,0107
-2,25	0,0122	0,0139	0,0158	0,0179	0,0202
-2,00	0,0228	0,0256	0,0287	0,0322	0,0359
-1,75	0,0401	0,0446	0,0495	0,0548	0,0606
-1,50	0,0668	0,0735	0,0808	0,0885	0,0968
-1,25	0,1056	0,1151	0,1251	0,1357	0,1469
-1,00	0,1587	0,1711	0,1841	0,1977	0,2119
-0,75	0,2266	0,242	0,2578	0,2743	0,2912
-0,50	0,3085	0,3264	0,3446	0,3632	0,3821
-0,25	0,4013	0,4207	0,4404	0,4602	0,4801
0,00	0,5	0,5199	0,5398	0,5596	0,5793
0,25	0,5987	0,6179	0,6368	0,6554	0,6736
0,50	0,6915	0,7088	0,7257	0,7422	0,758
0,75	0,7734	0,7881	0,8023	0,8159	0,8289
1,00	0,8413	0,8531	0,8643	0,8749	0,8849
1,25	0,8944	0,9032	0,9115	0,9192	0,9265
1,50	0,9332	0,9394	0,9452	0,9505	0,9554
1,75	0,9599	0,9641	0,9678	0,9713	0,9744
2,0	0,9772	0,9798	0,9821	0,9842	0,9861
2,25	0,9878	0,9893	0,9906	0,9918	0,9929
2,50	0,9938	0,9946	0,9953	0,996	0,9965
2,75	0,997	0,9974	0,9978	0,9981	0,9984

$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant t_1+t_2\big)$ $\qquad$ $\mathcal{X}\sim\mathcal{N}\big(0\,;1\big)$

12. Loi normale :

Exercice 5473

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 10 et 9 . $(\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(10\,;9))$.

1. Donner l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

   a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 9\big)$ b. $\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 12\big)$

Exercice 5479

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètres -3 et 5 $(\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(-3\,;5))$.

1. Donner la moyenne, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.
2. Sans l'aide de la calculatrice, parmi les probabilités ci-dessous, lesquelles ont une valeur strictement supérieure à 0,5 :

   a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 0\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant 2\big)$ c. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}>-4\big)$

Exercice 6960

La société "*Bonne Mamie*" utilise une machine pour remplir à la chaîne des pots de confiture. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui à chaque pot de confiture produit associe la masse de confiture qu'il contient exprimée en grammes.

Dans le cas où la machine est correctement réglée, on admet que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu=125$ et d'écart-type $\sigma=2$.

On estime qu'un pot de confiture est conforme lorsque la masse de confiture qu'il contient est comprise entre 120 et 130 grammes.

On choisit au hasard un pot parmi ceux qui ont une masse de confiture inférieure à 130 grammes. Quelle est la probabilité que ce pot ne soit pas conforme? On donnera le résultat arrondi à 10^{-4}.

13. Loi normale : intervalle et écart-type :

Exercice 5481

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres -2 et 4. $(\mathcal{X}\sim\mathcal{N}(-2\,;4))$.

Sans calculatrice, donner la valeur approchée au centième des probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}\big(-4\leqslant\mathcal{X}\leqslant 0\big)$ b. $\mathcal{P}\big(-6\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2\big)$ c. $\mathcal{P}\big(-8\leqslant\mathcal{X}\leqslant 4\big)$

14. Loi normale : détermination d'un intervalle :

Exercice 5480

Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 2 et 9. *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(2\,;9)$).*

On répondra aux questions à l'aide de la calculatrice :

1. Déterminer une valeur approchée au centième du réel x vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant x) = 0{,}24$

2. Déterminer une valeur approchée au centième du réel x vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geqslant x) = 0{,}7$

3. Déterminer une valeur approchée au centième du réel x vérifiant l'égalité : $\mathcal{P}(2-x \leqslant \mathcal{X} \leqslant 2+x) = 0{,}5$

Exprimer ces conditions sous la forme $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant x)$

15. Loi normale : recherche d'un paramètre :

Exercice 5512

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination "*compote allégée*".

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est à dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la prodution, associe sa teneur en sucre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale d'espérance $m = 0{,}17$ et d'écart-type σ.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production soit conforme est égale à 0,99.

Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire définie par : $\mathcal{Z} = \dfrac{\mathcal{X}-m}{\sigma}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit-elle?

2. Déterminer, en fonction de σ l'intervalle auquel appartient $\mathcal{Z}$ lorsque $\mathcal{X}$ appartient à l'intervalle $[0{,}16\,;0{,}18]$.

3. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ.

On pourra utiliser la tableau ci-dessous, dans lequel la variable aléatoire $\mathcal{Z}$ suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1.

$\mathcal{P}(-\beta \leqslant \mathcal{Z} \leqslant \beta)$	β
0,985	2,4324
0,986	2,4573
0,987	2,4838
0,988	2,5121
0,989	2,5427

$\mathcal{P}(-\beta \leqslant \mathcal{Z} \leqslant \beta)$	β
0,990	2,5758
0,991	2,6121
0,992	2,6521
0,993	2,6968
0,994	2,7478

Exercice 5485

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 0 et σ^2. *($\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0\,;\sigma^2)$).*

On cherche à déterminer la valeur de σ de sorte à ce qu'on ait la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 4) = 0{,}7$

On note $\mathcal{Z}$ une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre 0 et 1. *($\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0\,;1)$)*

1. Déterminer la valeur approchée de x au millième tel que : $\mathcal{P}(\mathcal{Z} \leqslant x) = 0{,}7$

2. En déduire une valeur approchée au millième près de l'écart-type σ recherché.

Exercice 6954

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire $\mathcal{Y}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart type σ, σ étant un réel strictement positif.

Sachant que $\mathcal{P}(0{,}9 \leqslant \mathcal{Y} \leqslant 1{,}1) = 0{,}98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ.

Exercice 5486

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 3 et σ^2.

Déterminer une valeur de σ arrondie au millième près afin que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ vérifie les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leqslant 2) = 0{,}4$ b. $\mathcal{P}(|\mathcal{X}-3| \leqslant 1) = 0{,}45$

Exercice 6328

Sur une chaîne d'embouteillage dans une brasserie, la quantité x *(en $c\ell$)* de liquide fournie par la machine pour remplir chaque bouteille de contenance $110\,c\ell$, peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ de la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La législation impose qu'il y ait moins de 0,1 % de bouteilles contenant moins d'un litre.
A quelle valeur de la moyenne μ doit-on régler la machine pour respecter cette législation?

16. Loi binomiale et théorème de Moivre-Laplace :

Exercice 5494

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètres 75 et 0,4 *($\mathcal{X}\sim\mathcal{B}(75\,;0{,}4)$)*.

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$ *(on donnera les valeurs arrondies au millième près)*.

2. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur approchée au millième des probabilités suivantes :
   a. $\mathcal{P}\big(18\leqslant\mathcal{X}\leqslant46\big)$ b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant25\big)$ c. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\geqslant23\big)$

Rappels :

On a les deux propriétés suivantes de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire $\mathcal{W}$:
$$E(a\cdot\mathcal{W}+b)=a\cdot E(\mathcal{W})+b \quad ; \quad V(a\cdot\mathcal{W}+b)=a^2\cdot V(\mathcal{W})$$
où a et b sont des nombres réels.

En notant $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite *($\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0\,;1)$)*, on considère la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ définie par la relation :
$$\mathcal{Y}=\sigma(\mathcal{X})\cdot\mathcal{Z}+E(\mathcal{X})$$

3. a. Etablir les égalités suivantes :
   $$E(\mathcal{Y})=E(\mathcal{X}) \quad ; \quad V(\mathcal{Y})=V(\mathcal{X})$$
   b. Justifier que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ suit une loi normale de paramètres 30 et 18.
   c. Donner les valeurs approchées au millième près de probabilités suivantes :
   $$\mathcal{P}\big(18\leqslant\mathcal{Y}\leqslant46\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{Y}\leqslant25\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(\mathcal{Y}\geqslant23\big)$$

4. a. Pour tous nombres réels a et b vérifiant $a<b$, émettre une conjecture quant à la comparaison des deux probabilités ci-dessous :
   $$\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{X}\leqslant b\big) \quad ; \quad \mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{Y}\leqslant b\big)$$
   b. Quel théorème du cours permet de justifier cette conjecture.

Exercice 5522

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. Leur diamètre est exprimé en millimètres.

Les rondelles sont commercialisées par lot de 1 000.

On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 rondelles.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ qui, à tout prélèvement de 1 000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1 000 rondelles.

On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi binomiale de paramètres $n=1000$ et $p=0{,}02$.

1. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. a. Justifier l'approximation suivante :
   $$\mathcal{P}\big(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant15\big)\approx\mathcal{P}\big(-4{,}518\leqslant\mathcal{Z}\leqslant-1{,}129\big)$$
   où $\mathcal{Z}$ suit une loi normale de paramètre 0 et 1.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1 000 rondelles.

Exercice 6955

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques.

Les billes passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangés, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
   a. On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3}.
   b. Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes?

2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égal à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif?

17. Loi normale : intervalle de fluctuation de la fréquence :

Exercice 5517

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}_n$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p *($\mathcal{X}_n\sim\mathcal{B}(n\,;p)$)*.

On considère la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$ définie par :
$$\mathcal{Z}_n=\frac{\mathcal{X}_n-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}$$

1. En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire :
   $$E\big(a\cdot\mathcal{X}+b\big)=a\cdot E\big(\mathcal{X}\big)+b \quad ; \quad V\big(a\cdot\mathcal{X}+b\big)=a^2\cdot V\big(\mathcal{X}\big)$$
   déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\mathcal{Z}_n$.

2. a. Que peut-on dire de la valeur de la limite suivante :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\big(a\leqslant\mathcal{Z}_n\leqslant b\big)$$
   b. En déduire la valeur de la limite :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}\big(-1{,}96\leqslant\mathcal{Z}_n\leqslant1{,}96\big)$$

3. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$. Démontrer que pour un entier n assez grand, on a :

$$\mathcal{P}\left(p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\leqslant\mathcal{F}_n\leqslant p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)\approx 0{,}95$$

Exercice 5518

Une loterie propose 200 tickets dont 50 sont des tickets gagnants. On considère la variable $\mathcal{X}$ donnant, sur un lot de 40 tickets choisi au hasard, le nombre de tickets gagnants. On suppose que le nombre de tickets est suffisamment grand pour assimiler le tirage des 40 tickets à une jeu de tirage avec remise *(le fait de tirer un ticket ne modifie par les probabilités du jeu)*.

1. Préciser la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance et son écart-type.
2. En étudiant la loi binomiale, donner l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95 %.
3. a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %. *(on arrondi les bornes au millième près)*.

   b. Un grand joueur achète 40 tickets mais ne possède que 7 tickets remportant un lot. Son tirage est-il représentatif au seuil de 95 % *(on utilisera l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %)*.

Exercice 6072

A des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : "*88 % de notre thé garanti sans trace de pesticides*".

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. A cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides.

On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.
On note $\mathcal{F}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire $\mathcal{F}$ au seuil de 95 %. *(on utilisera les valeurs approchées au millième près)*.
2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère?

18. Loi normale : hypothèse et intervalle de fluctuation :

Exercice 5516

On considère qu'une pièce est équilibrée. On lance 100 fois cette pièce et on considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ comptant le nombre de fois où la face "*pile*" est apparue.

1. Donner la loi de la variable aléatoire $\mathcal{X}$, son espérance, sa variance et son écart-type.
2. On définit la variable aléatoire $\mathcal{F}$ définie par : $\mathcal{F}=\dfrac{\mathcal{X}}{100}$

   a. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence au seuil de 95 %.

   b. Après 100 lancers de pièces, Jean obtient 38 fois la face "*pile*".
   Peut-on rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée?

Exercice 6959

Un fabricant d'ampoules cherche à améliorer sa qualité et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?

Exercice 6424

On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin $A+$.
On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.
On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin $A+$.

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse :

"*On ne peut pas rejeter, au seuil de 5 %, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A parmi les donneurs de sang est de 39 % comme dans l'ensemble de la population.*"

19. Loi normale : intervalle de confiance de la proportion :

Exercice 6079

On cherche à étudier le nombre d'étudiants d'une université connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

Dans un premier sondage, on contaste que 240 étudiants répondent correctement, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de la proportion p des étudiants connaissant ce sigle dans cette université.

Exercice 5521

Une entreprise fabrique en grande série des pièces de bois.

Dans cette partie, on considère une grande quantité de pièces devant être livrées à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 1000 pièces prélevées au hasard dans cette livraison.

La livraison est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.
On constate que 961 pièces sont sans défaut.

1. Quelle est la fréquence des pièces sans aucun défaut parmi cette livraison?

2. On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 pièces prélevées au hasard et avec remise dans cette livraison, associe la fréquence des pièces de cet échantillon qui sont sans défaut.

   Déterminer l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion p de pièces sans défaut dans la grande quantité devant être livrées.

Exercice 6956

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On suppose que n personnes ont répondu à la question, et on admet que ces personnes constituent un échantillon aléatoire de taille n *(où n est un entier nature supérieur à 50)*.
Parmi ces personnes, 29 % sont favorables au projet d'aménagement.

1. Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion de personnes qui sont favorables au projet dans la population totale.

2. Déterminer la valeur minimale de l'entier n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,04.

Exercice 7805

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

On note : $J = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

Le but de cette partie est d'évaluer l'intégrale J à l'aide de la méthode probabiliste décrite ci-après.

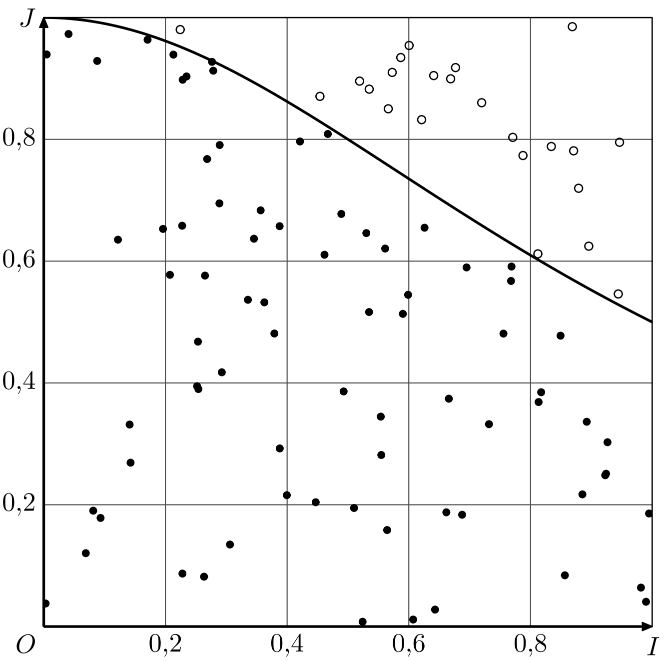
On choisit au hasard un point $M(x\,;y)$ en tirant de façon indépendante ses coordonnées x et y au hasard selon la loi uniforme sur $[0\,;1]$.
On admet que la probabilité p qu'un point tiré de cette manière soit situé sous la courbe $\mathscr{C}_g$ est égale l'intégrale J.

En pratique, on initialise un compteur c à 0, on fixe un entier naturel n et on répète n fois le processus suivant :

- on choisit au hasard et indépendamment deux nombres x et y, selon la loi uniforme sur $[0\,;1]$;
- si $M(x\,;y)$ est au-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$, on incrémente le compteur c de 1.

On admet que $f = \dfrac{c}{n}$ est une valeur approchée de J. *C'est le principe de la méthode dite de Monte-Carlo.*

La figure ci-dessous illustre la méthode présentée pour $n = 100$.
100 points ont été placés aléatoirement dans le carré.
Les disques noirs correspondent aux points sous la courbe, les disques blancs aux points au-dessous de la courbe.
Le rapport du nombre de disques noirs par le nombre total de disques donne une estimation de l'aire sous la courbe.



1. Recopier et compléter l'algorithme ci-après afin que la fonction `estimation()` retourne une valeur approchée de J.

```
def estimation(n)
    c ← ...
    Pour i allant de 1 à ...  faire
       x ← valeur aléatoire entre 0 et 1
       y ← ...
       Si ...  alors
           ...  prend la valeur ...
       Fin Si
    Fin Pour
    Renvoyer ...
```

   L'argument `n` indiqué lors de l'appel à la fonction `estimation()` est le nombre de points choisis pour réaliser cette approximation.

2. Pour $n = 1000$, l'algorithme ci-dessus a donné pour résultat : $f = 0{,}781$.
   Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la valeur exacte de J.

3. Quelle doit-être au minimum, la valeur de n pour que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, ait une amplitude inférieure ou égale à 0,02?

Exercice 6957

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

On admet que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

Combien de personnes l'institut doit-il interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Exercice 7579

On considère la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de paramètre 13 et 1 $(\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(13\,;1^2))$

La valeur de la probabilité $\mathcal{P}(11{,}5 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 14{,}5)$ arrondie au millième près :

1. 0,437
2. 0,866
3. 0,954
4. 0,999

