

Terminale S/Logarithmes

1. Introduction :

Exercice 3709



Soit f la fonction définie par sur $[0; 1]$:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$$

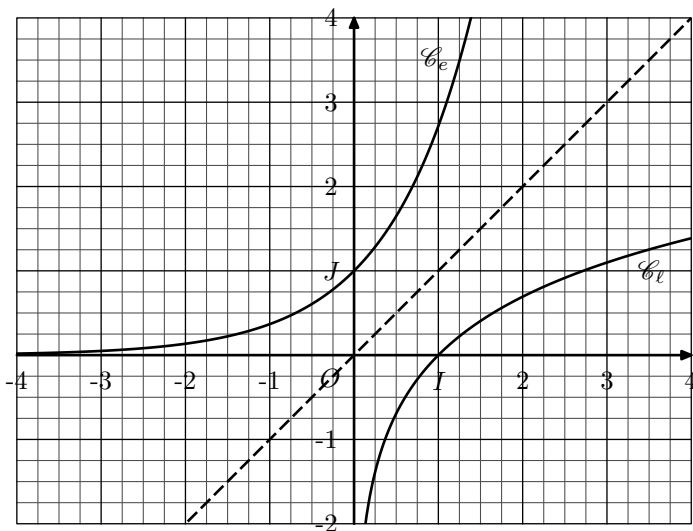
Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$:

$$(f \circ f)(x) = x$$

Exercice 3877



Dans le plan munit du repère orthonormé $(O; I; J)$, on considère les courbes \mathcal{C}_e et \mathcal{C}_l représentatives des fonctions exponentielle et logarithme :



2. Manipulations algébriques :

Exercice 3880



Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$ b. $\ln(2\sqrt{2})$ c. $\ln(6) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

d. $\ln(2 \cdot e^2)$ e. $\ln\left(\frac{2}{e^3}\right)$ f. $\ln(\sqrt{e^5})$

Exercice 6874



Etablir les égalités suivantes :

- Graphiquement déterminer les valeurs des deux images suivantes :
 $(\exp \circ \ln)(1)$; $(\ln \circ \exp)(0)$
- En utilisant la première bissectrice du plan, déterminer, si possible, la valeur des images suivantes :

a. $(\exp \circ \ln)(2)$	b. $(\exp \circ \ln)(3)$
c. $(\exp \circ \ln)(-1)$	d. $(\ln \circ \exp)(-1)$
e. $(\ln \circ \exp)(1)$	f. $(\ln \circ \exp)(1,5)$

Exercice 3879



- Résoudre chacune des inéquations suivantes :
 $3x + 1 > 0$; $-x + 2 > 0$
 - Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g :
 $f(x) = \ln(3x+1)$; $g(x) = \ln(-x+2)$
- Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a. $h(x) = \ln x^2$	d. $j(x) = \ln(e^x - 1)$
e. $k(x) = \ln(e^x - e^{-x})$	f. $\ell(x) = \frac{1}{\ln(x) - 1}$

a. $\ln(16) + \ln(4) = 6 \cdot \ln 2$	b. $\ln\left(\frac{7}{5}\right) = -\ln\left(\frac{5}{7}\right)$
c. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \ln\left(\frac{9}{8}\right) = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$	d. $\frac{\ln(\sqrt{8})}{\ln(\sqrt{2})} = 3$

Exercice 6875




On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$$

- Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .
- Sur \mathbb{R} , établir l'identité : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x})$

3. En déduire que la fonction f est positive sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 6876 

1. Que peut-on dire de l'image de deux nombres opposés par la fonction exponentielle?
2. Que peut-on dire de l'image de deux nombres inverses par la fonction logarithme?

Exercice 3882  

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1. On considère la fonction u définie par :

$$u(x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Par une disjonction de cas, établir que la fonction u est définie sur \mathbb{R} .

2. On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} . Etablir que la fonction f est la fonction nulle.

Exercice 5174  

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x + e^{-x}$

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

On admet que pour tout nombre x positif, on a la relation : $\ln(1+x) \leq x$

1. En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul :

$$\ln n \leq u_n$$

4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

3. Equations et inéquations de logarithmes :

Exercice 3883 

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a. $\ln(5x+1) = \ln(x-1)$ | b. $2 \cdot \ln(3-x) = \ln(2)$ |
| c. $\ln(3x+1) = 5$ | d. $3 \cdot e^{2x-1} = 2$ |
| e. $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$ | f. $e^{2x} + 4 \cdot e^x - 1 = 0$ |

Exercice 3884  

Résoudre, dans \mathbb{R} , les deux systèmes d'équations suivants :

- | | |
|---|--|
| a. $\begin{cases} 2 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln y = -11 \\ \ln x + \ln y = 2 \end{cases}$ | b. $\begin{cases} \ln(2 \cdot x + y) = 0 \\ \ln(x) + \ln(y) = 1 \end{cases}$ |
|---|--|

Exercice 5899 

1. Résoudre dans $] -1; +\infty[$, l'inéquation :

$$(E): \ln(x+1) \leq \ln(x^2+1)$$

2. Résoudre dans $] -3; 2[$, l'inéquation :

$$(F): \ln(4-2x) < \ln(x+3)$$

Exercice 4192   

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules :

75 % de particules A et 25 % de particules de B .

Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B .

On note $p(t)$ la proportion de particules de type A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t=0$, on a $p(0)=0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a :

$$p(t) = 0,75 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

La demi-vie des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondi à l'unité).

4. Equation et inéquation de puissances :

Exercice 3886 

Résoudre, dans \mathbb{Z} , les inéquations suivantes :

- | | |
|----------------------|---------------------------------|
| a. $5^n \geq 2$ | b. $0,1^n \geq 2$ |
| c. $(\ln 2)^n < e^2$ | d. $\ln(2^n) - \ln(3^n) \leq 2$ |

Exercice 5898  

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{2}{3}$.

- a. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- b. Déterminer le plus petit entier naturel n réalisant

l'inégalité :
 $u_n < 0,01$

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) :
- $$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$
- Justifier que la suite (S_n) est croissante.
 - Exprimer la somme S_n en fonction du rang n .
 - Justifier qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (S_n) appartiennent à l'intervalle $[9,9; 10]$.
 - Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $S_n \in [9,9; 10]$.

Exercice 3288



On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$$

- Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un unique

nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

- Déterminer l'entier naturel n_0 tel que : $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.
- Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

Exercice 5204



Une entreprise fabrique des articles. Suite à une série de contrôle, un article est détecté possédant au moins un défaut avec une probabilité de 0,0494.

Un petit commerçant passe une commande d'articles à cette entreprise. Les stocks sont suffisamment grand pour que le choix de ces articles soit assimilé à un tirage successif et indépendant.

- En commandant 25 articles, calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
- Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50%. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

5. Limites :

Exercice 3888



Déterminer la valeur des limites suivantes :

- | | |
|--|---|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \ln x + x$ | b. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \ln(x+3) - 3 \cdot x$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$ | d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1)$ |
| e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-2 \cdot \ln x + 1}$ | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x)$ |

7. Dérivées :

Exercice 3887



Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| a. $f(x) = x \cdot \ln x$ | b. $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x^2 + 1}$ |
| c. $h(x) = \ln(\sqrt{1-x})$ | d. $j(x) = \ln(e^x - 1)$ |

Exercice 5148



On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \cdot \ln x$$

La courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal.

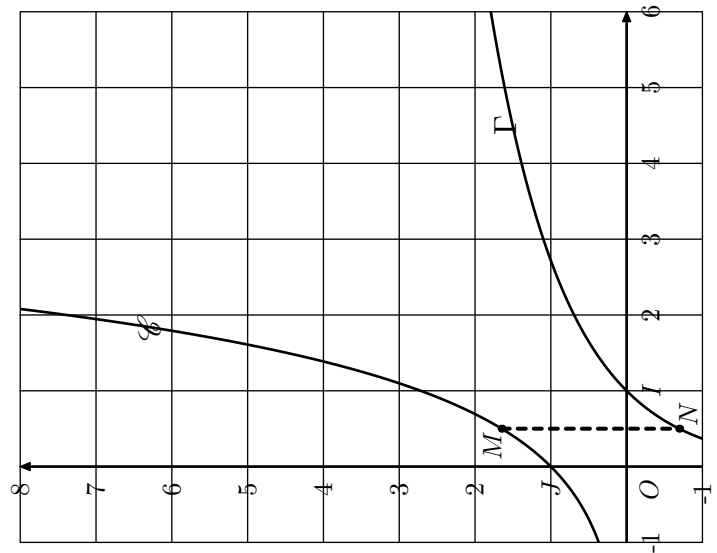
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 - Etudier les variations de f sur $]0; +\infty[$
- Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer qu'il existe une tangente unique à la courbe \mathcal{C} passant par O . Préciser une équation de cette tangente.

8. Etudes de fonctions :

Exercice 5149

1. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
- $$f(x) = x \cdot e^x - 1$$
- Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f .
 - Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
 - Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
2. On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthornormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Les courbes \mathcal{C}_f et Γ sont données ci-dessous :



Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de \mathcal{C} d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x .

On rappelle que pour tout réel x strictement positif :

$$e^x > \ln(x).$$

- Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur à 10^{-2} près.
- En utilisant la question 1., montrer que : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.
En déduire que la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

9. Etude de fonctions avec étude d'une fonction auxiliaire :

Exercice 109

On considère la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$$

- Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$
 Montrer que la fonction g est positive sur $]1; +\infty[$.
- Montrer que, pour tout x de $]1; +\infty[$:
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$
 - En déduire le sens de variation de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice 5141**Partie A**

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \cdot \ln x$

- Etudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α , arrondie au centième.
- En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.
- En déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Tracer la courbe \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 5959**Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)$$

- En détaillant les calculs effectués, montrer que :

$$g'(x) = 2x - 2x \cdot \ln(x^2 + 1)$$
- Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α ,

dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}; \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha)=0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α .

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie B: Etude de la fonction f

La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \quad \text{lorsque } x \neq 0$$

Sa courbe représentative (\mathcal{C}_f), dans le plan rapporté à un repère d'origine O est donnée ci-dessous :

10. Etude de familles de fonctions :

Exercice 5150



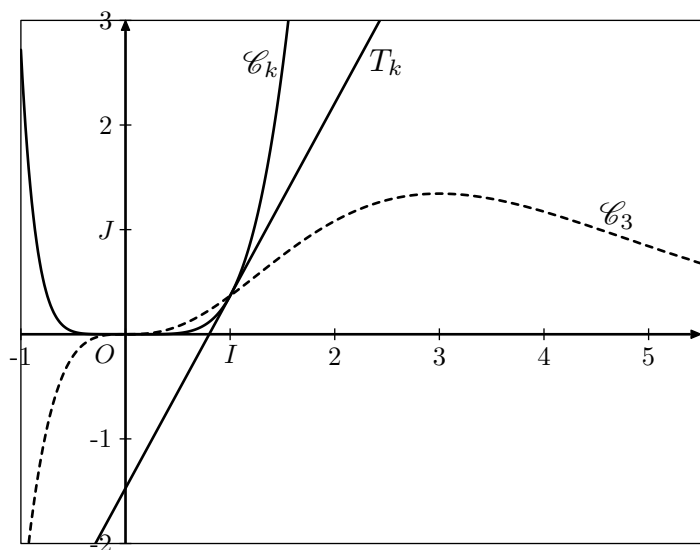
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = x^n \cdot e^{-x}$$

On note \mathcal{C}_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe \mathcal{C}_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe \mathcal{C}_3 .

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(\frac{4}{5}; 0)$.



11. Suites :

Exercice 3925



1. On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(2x) + 1 - x$$

- a. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La

1. a. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

- b. Vérifier que, pour x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2 \cdot (1+x^2)}$$

Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. a. Montrer que, pour $x \geq 1$: $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$

- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

1. a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.

- b. Etudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .

- c. A l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2. a. Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.

- b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x :

$$f'_n(x) = x^{n-1} \cdot (n-x) \cdot e^{-x}$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x=3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\frac{k-2}{k-1}; 0)$.

- b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k .

clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la rédaction.

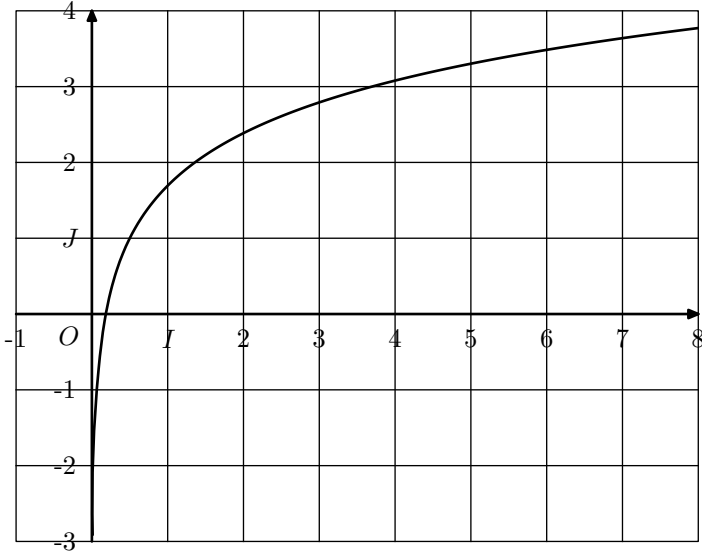
Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet sur $[1; +\infty[$ une unique solution notée α .

- b. Démontrer que : $\ln(2 \cdot \alpha) + 1 = \alpha$

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = \ln(2 \cdot u_n) + 1.$$

On désigne par (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(2 \cdot x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous :



- En utilisant la courbe (Γ) , construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
- Démontrer que pour tout entier naturel n : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$
- Démontrer que la suite (u_n) converge vers α .

Exercice 5167



Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + e^{-x}$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

- Etudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par :

$$u_1 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$$

- Démontrer que, pour tout réel x positif : $\ln(1+x) \leq x$
On pourra étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(1+x)$
- En déduire que, pour tout entier naturel n non nul : $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$
- Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul : $f[\ln(n)] = \ln(n) + \frac{1}{n}$
- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul : $\ln n \leq u_n$
- En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

12. Logarithmes et probabilités :

Exercice 4195



Dans un jeu aléatoire, l'évènement G "la partie est gagnée" a une probabilité de :

$$\mathcal{P}(G) = \frac{23}{180}$$

- Un joueur répète six fois ce jeu de manière indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
- Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9?

Exercice 6047



Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;

- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "le joueur gagne la n -ième partie" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n .

On a donc : $p_1 = 0,1$

- A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5}$.
- Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul : $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$
- Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
- Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?