

# Terminale S / Limite de suites

## 1. Rappels: suites arithmétiques et géométriques :

### Exercice 3393

On considère la suite arithmétique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de premier terme  $\frac{3}{4}$  et de raison  $\frac{1}{2}$ .

- Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
- Donner la formule explicite de  $(u_n)$  donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
- Déterminer la valeur de la suite suivante :  

$$S = u_5 + u_6 + \dots + u_{12}$$

### Exercice 3394

On considère la suite géométrique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de premier terme  $\frac{16}{27}$  et de raison  $\frac{3}{2}$ .

- Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
- Donner la formule explicite de  $(u_n)$  donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
- Déterminer la valeur de la suite suivante :  

$$S = u_3 + u_4 + \dots + u_{16}$$

### Exercice 5012

- Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique définie pour  $n \in \mathbb{N}$ . On a la valeur des deux termes suivants :  
 $u_4 = 3$  ;  $u_7 = 15$ 
  - Déterminer les éléments caractéristiques de la suite  $(u_n)$ .
  - Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite  $(u_n)$ .
- Soit  $(v_n)$  une suite géométrique définie pour  $n \in \mathbb{N}$ . On a la valeur des deux termes suivants :  
 $v_2 = 2$  ;  $v_5 = 54$ 
  - Déterminer les éléments caractéristiques de la suite  $(v_n)$ .

- Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite  $(v_n)$ .

### Exercice 6724

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?

Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

### Exercice 6725

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. 8 ; 4 ; 2 ; 1 ;  $\frac{1}{2}$  ;  $\frac{1}{4}$

b. 1 ; 3 ; 9 ; 18 ; 54 ; 162

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?

Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

### Exercice 3398

En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique, déterminer chacune de leurs valeurs :

a.  $12 + 7 + 2 + (-3) + \dots + (-28)$

b.  $27 + 3 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{243}$

c.  $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \dots + \frac{62}{3}$

d.  $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots + \frac{1}{2^{24}}$

## 2. Rappels: autres :

**Exercice 3395** 

1. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

2. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Déterminer les cinq premiers termes de la suite  $(v_n)$ .

**Exercice 3396** 

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a.  $\sum_{i=0}^7 i$

b.  $\sum_{i=3}^8 (i^2 - i)$

c.  $\sum_{i=0}^7 (i - 4)$

d.  $\sum_{i=1}^6 \frac{1}{i}$

e.  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i^2}$

f.  $\sum_{\ell=0}^3 \left[ \sum_{i=0}^{\ell} i \right]$

**Exercice 5042**  

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a.  $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$

b.  $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

c.  $u_0 = 3 \quad ; \quad u_n = 2 \cdot u_{n-1} - 2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$

d.  $u_0 = -1 \quad ; \quad u_n = \frac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$

**3. Limites de suites arithmétiques et géométriques :****Exercice 6726** 

1. On considère la suite  $(u_n)$  arithmétique de premier terme  $-4$  et de raison  $5$  :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n$	-4	1	6	11	16	21		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme  $u_n$  lorsque le rang  $n$  devient de plus en plus grand ?  
On notera :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

2. On considère la suite  $(v_n)$  arithmétique de premier terme  $3$  et de raison  $-1,2$  :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$v_n$	3	1,8	0,6	-0,6	-1,8	-3		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme  $v_n$  lorsque le rang  $n$  devient de plus en plus grand ?  
On notera :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$

**Exercice 6727**  

1. On considère la suite  $(u_n)$  géométrique de premier terme  $4$  et de raison  $2$  :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n$	4	8	16	32	64	128		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme  $u_n$  lorsque le rang  $n$  devient de plus en plus grand ?  
On notera :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

2. On considère la suite  $(v_n)$  géométrique de premier terme  $81$  et de raison  $\frac{1}{3}$  :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$v_n$	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme  $v_n$  lorsque le rang  $n$  devient de plus en plus grand ?  
On notera :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$

**Exercice 6728** 

On considère la suite  $(u_n)$  géométrique de premier terme  $2,8$  et de raison  $0,9$ .

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n$	2,8	2,52	2,268	2,041				

2. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite  $(u_n)$  ?

On note :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

**Exercice 2557** 

1. On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie explicitement par :  
 $u_n = 9n - 5$

a. Déterminer la nature de la suite  $(u_n)$  en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

2. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie explicitement par :

$$v_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a. Déterminer la nature de la suite  $(v_n)$  en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

## 4. Limites de somme des termes de suites :

### Exercice 2559



1. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison  $-1$ .
  - a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang  $n$ .
  - b. On note  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  la somme des  $(n+1)$  premiers termes de la suite. Donner l'expression de  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire la limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .
2. Soit  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite géométrique de premier terme 5 et de raison  $\frac{1}{2}$ .
  - a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang  $n$ .
  - b. On note  $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  la somme des  $(n+1)$  premiers termes de la suite. Donner l'expression de  $S'_n$  en fonction de  $n$ .
  - c. En déduire la limite:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$ .

### Exercice 2588



Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de premier terme 2 et de raison  $\frac{2}{5}$  :

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.
2.
  - a. Déterminer l'expression de la somme des  $n$  premiers termes de cette suite en fonction de  $n$ .
  - b. En déduire la valeur de la limite suivante:
 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

### Exercice 2621



On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  géométrique de premier terme 1 et de raison  $\frac{1}{2}$  et la suite  $(R_n)$  définie, pour  $n \geq 2$ , par la somme :

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite  $(R_n)$ .

### Exercice 6174



Un coureur se lance un défi: il souhaite faire le tour de l'Europe.

Le premier jour, il parcourt  $50 \text{ km}$ . Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de  $1\%$ .

On note  $u_n$  la longueur parcourue par le coureur le  $n$ -ième jour. En supposant que le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

2.
  - a. Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$ ? Donner les éléments caractéristiques de la suite  $(u_n)$ .
  - b. Exprimer le terme  $u_n$  en fonction du rang  $n$ .
  - c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100<sup>e</sup> jour? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. On note  $S$  la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)$ :  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

- a. Exprimer la somme  $S_n$  en fonction du rang  $n$ .
- b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

$n$	10	100	500	750	1000
$S_n$					

- c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme  $S_n$  quand la valeur de  $n$  devient de plus en plus grand?

### Exercice 2560



Un globe-trotter a parié de parcourir  $5000 \text{ km}$  à pied. Il peut, frais et dispos, parcourir  $50 \text{ km}$  en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de  $1\%$  tous les jours.

On notera  $d_n$  la distance parcourue durant le  $n$ -ième jour.

1. Calculer les distances  $d_1, d_2, d_3$  parcourues durant les trois premiers jours.
2. Quelle est précisément la nature de la suite? Déterminer la valeur de  $d_n$  en fonction de  $n$ .
3. On note  $L_n$  la distance en kilomètres parcourus au bout de  $n$  jours.

$$L_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

- a. Déterminer l'expression de  $L_n$  en fonction de  $n$ .
- b. En déduire la limite de  $L_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Le globe-trotter peut-il gagner?
- c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours  $N$  qui lui seraient nécessaires pour parcourir  $4999 \text{ km}$ .

### Exercice 5738



On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

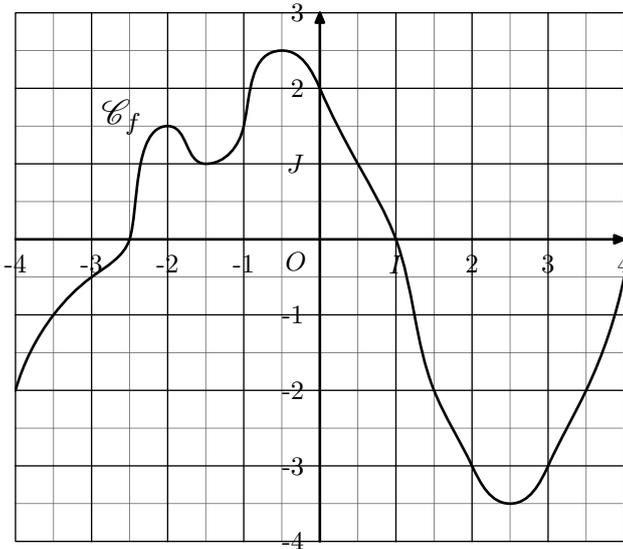
1. Exprimer le terme  $S_n$  en fonction de  $n$ .
2. Déterminer la limite de la suite  $(T_n)$ .

## 5. Autres limites :

### Exercice 3397



On considère la fonction  $f$  définie sur  $[-4; 4]$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous :



On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation :  
 $u_0 = 2$  ;  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que le terme  $u_1$  est égal à  $-3$ .
2. Justifier les égalités suivantes :
  - a.  $u_2 = -0,5$
  - b.  $u_3 = 2,5$

3. Compléter le tableau suivant :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n$										

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite  $(u_n)$  ?

## 6. Avec un tableau :

### Exercice 6732



Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondi les valeurs au centième près :

1. Soit  $(u_n)$  définie par la relation :  
 $u_n = 2 \cdot n + 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$u_n$								

2. Soit  $(v_n)$  définie par la relation :  
 $v_0 = 5$  ;  $v_{n+1} = 0,75 \cdot v_n + 3$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 Soit  $(w_n)$  définie par la relation :

### Exercice 3411

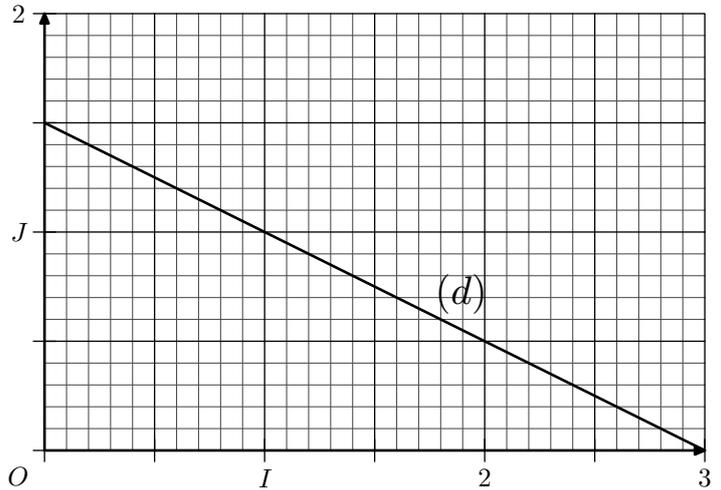


On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation de récurrence :

$$u_0 = \frac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot u_n + \frac{3}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère  $(O; I; J)$  orthonormé, la droite  $(d)$  ayant pour équation :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x + \frac{3}{2}$$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite (les constructions doivent être laissées).
2. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n$	2,5	0,25	1,38	0,81	1,09					

b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite  $(u_n)$  ?

$$w_n = v_n - 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a. Compléter le tableau de valeurs :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$v_n$								
$w_n$								

b. Vérifier que les 8 termes de la suite  $(w_n)$  permettent de conjecturer que la suite  $(w_n)$  est géométrique.

3. Soit  $(t_n)$  définie par la relation :  
 $t_0 = 0$  ;  $t_1 = 1$  ;  $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$t_n$								

4. Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par les relations :

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} a_{n+1} = 2 \cdot a_n - b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3 \cdot b_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_n$								
$b_n$								

### Exercice 6731



On définit les deux suites  $u$  et  $v$  par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (u_n + 2 \cdot v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4} \cdot (u_n + 3 \cdot v_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

## 7. Suites arithmético-géométriques :

### Exercice 6733



On considère la suite  $(u_n)$  définie par la relation :  
 $u_0 = 8$  ;  $u_{n+1} = 0,95 \cdot u_n + 0,5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. On définit la suite  $(v_n)$  définie par la relation :  
 $v_n = u_n - 10$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- Justifier que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
- Exprimer les termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .

2. En déduire une expression de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$

3. Déterminer la limite des termes de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

## 8. Suites homogènes et suites géométriques :

### Exercice 5734



On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 2 ; u_{n+1} = \frac{1 + 0,5 \cdot u_n}{0,5 + u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$

1. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n$ , par :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

1. A l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes des ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

	A	B	C	D	E
1	$x_n$	$y_n$	$w_n$		$t_n$
2	1	12			
3	8,33	9,25			
4	8,94	9,02			
5	9,00	9,00			
6	9,00	9,00			

2. On définit la suite  $(w_n)$  par :  
 $w_n = v_n - u_n$

- Dans la colonne C, exprimer les 20 premiers termes de la suite  $w$ .
- Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite  $w$  suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?

2. On définit la suite  $t$  définie par :  $t_n = 3 \cdot u_n + 8 \cdot v_n$

- Exprimer les 20 premiers termes de la suite  $t$ .
- Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite  $t$ ?

### Exercice 6734



On considère la suite  $(u_n)$  définie par la relation :  
 $u_0 = -2$  ;  $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 0,5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

1. On définit la suite  $(v_n)$  définie par la relation :  
 $v_n = u_n + 0,5$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

- Justifier que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques
- Exprimer les termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .

2. En déduire une expression de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$

3. Déterminer la limite des termes de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $-\frac{1}{3}$ .

b. Calculer  $v_0$  puis écrire  $v_n$  en fonction de  $n$ .

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  
 $v_n \neq 1$ .

b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

c. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 6737** 

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par la relation :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2 - u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite  $(u_n)$  sont différent de  $-2$  et de  $0$ .

1. On définit la suite  $(v_n)$  définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Justifier que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera les éléments caractéristiques.
- Exprimer les termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .

2. En déduire une expression des termes de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

3. Déterminer la limite des termes de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 2415** 

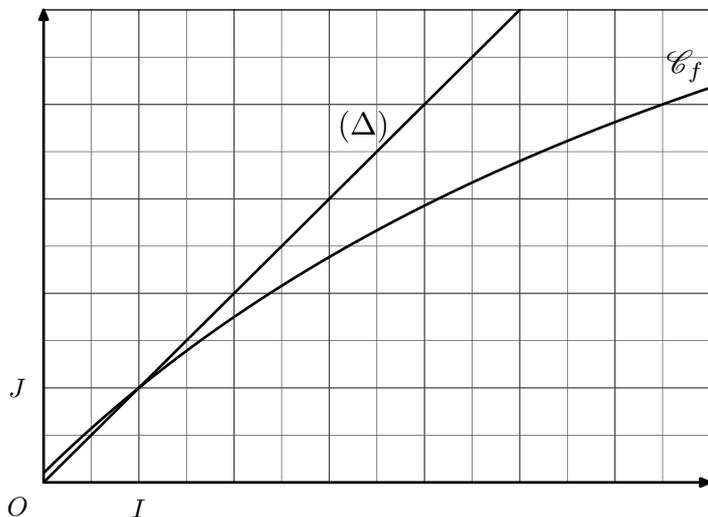
On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = \frac{13}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{10 \cdot u_n + 1}{u_n + 10} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite  $(u_n)$  sont strictement supérieurs à  $1$ .

1. On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{10 \cdot x + 1}{x + 10}$

On représente ci-dessous, dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$ , la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  et la première bissectrice  $(\Delta)$  du plan.



## 9. Suites homographiques et suites arithmétiques :

**Exercice 5852**  

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n > 1$

On définit les termes de la suite  $(u_n)$  par la relation :

a. Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$

b. Faire une conjecture quant à la limite de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

2. On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la relation :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique.

b. Donner l'expression des termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de leur rang  $n$ .

3. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

b. En déduire l'expression des termes de la suite  $(u_n)$  en fonction de leur rang  $n$ .

4. Déterminer la limite de  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 3517**   

Une suite numérique  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est définie par son premier terme  $U_1$  et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{6 + U_n}{2 + U_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs  $a$  et  $b$  de  $U_1$  ( $a < b$ ) pour lesquelles la suite est constante.

2. a. Montrer que si  $U_1 \neq a$  et  $U_1 \neq b$ , il en est de même de  $U_n$ .

b. Dans ces conditions, calculer :

$$\frac{U_{n+1} - a}{U_{n+1} - b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n - a}{U_n - b}$$

3. On suppose que  $U_1 \neq a$  et  $U_1 \neq b$  et on considère la suite  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par :

$$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

a. Montrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique.

b. Calculer la limite de  $|V_n|$  quand  $n$  tend vers plus l'infini. En déduire celle de  $U_n$ .

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{3}$ .

2. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 6736** 

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par la relation :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2 \cdot u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tous les termes de la suite  $(u_n)$  sont définis et qu'ils vérifient :  $u_n > -1$

1. On définit la suite  $(v_n)$  définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Justifier que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on déterminera les éléments caractéristiques.
- b. Exprimer les termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .

2. a. Etablir l'égalité :

$$u_n = \frac{4 - 10 \cdot n}{1 + 10 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- b. Montrer que les termes de la suite  $(u_n)$ , pour  $n \geq 1$ , admettent l'expression :

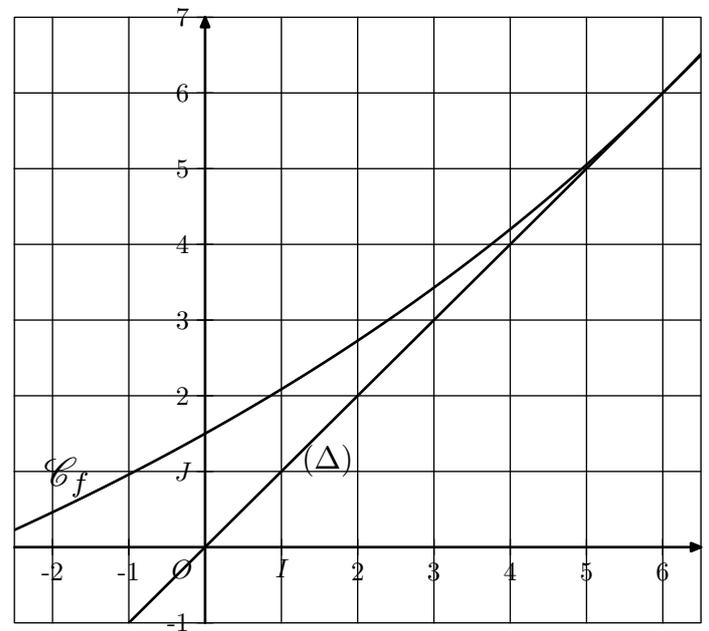
$$u_n = \frac{\frac{4}{n} - 10}{\frac{1}{n} + 10}$$

- c. Déterminer la limite des termes de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 3400** 

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$  orthonormé, on considère la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$



La droite  $(\Delta)$  est la première bissectrice du plan.

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par récurrence par :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que la suite  $(u_n)$  est définie sur  $\mathbb{N}$  et que ses termes vérifient la comparaison :  $u_n < 6$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite  $(u_n)$ .
2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

3. On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Etablir l'égalité suivante :  $w_{n+1} - w_n = -\frac{1}{18}$
- b. Donner la nature et les caractéristiques de la suite  $(w_n)$  ainsi que l'expression du terme  $w_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer l'expression du terme  $u_n$  en fonction de  $n$ .

4. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

**10. Suites définies conjointement :**

**Exercice 6739** 

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2 \cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite  $(w_n)$  définie par la relation :

$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- a. Etablir que la suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 5.
- b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , le terme de rang  $n$  s'exprime par :

$$w_n = -5^n$$

2. On considère la suite  $(t_n)$  définie par :

$$t_n = 3 \cdot u_n + v_n$$

- a. Montrer que :  $t_0 = 19$
- b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :  $t_{n+1} = t_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

On admettra que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $t_n = 19$

3. Déduire une expression des termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .
4. En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 6738** 

On considère les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 3 \cdot u_n - 2 \cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2 \cdot v_n \end{cases}$$

- On considère la suite  $(w_n)$  définie par la relation :  $w_n = v_n - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - Etablir que la suite  $(w_n)$  est une suite géométrique de raison 4.
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ , le terme de rang  $n$  s'exprime par :  $w_n = -4 \times 4^n$
- On considère la suite  $(t_n)$  définie par :  $t_n = 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 
  - Donner la valeur du terme  $t_0$ .

- Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :  $t_{n+1} = t_n$

On admettra que la suite  $(t_n)$  est constante.

- Déduire une expression des termes des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  en fonction de  $n$ .
- En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 6759**  

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0,2 \cdot a_n + 1,3 \cdot b_n \\ b_{n+1} = -0,8 \cdot a_n - 0,2 \cdot b_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Exprimer les termes  $a_{n+2}$  et  $b_{n+2}$  en fonction des termes  $a_n$  et  $b_n$ .
- Que peut-on dire des termes de la suite  $(a_{2n})$ ?

**11. Autres suites :****Exercice 6765**  

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_{n+1} = 0,5 \cdot u_n + 0,5 \cdot n - 1,5$$

- Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $v_n = 0,1 \cdot u_n - 0,1 \cdot n + 0,5$   
Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$
- Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 6799** 

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 6 ; u_{n+1} = 2 \cdot u_n - 3 \cdot n + 5 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Donner les trois premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = u_n - 3 \cdot n + 2$ 
  - Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison 2.
  - En déduire une expression des termes de la suite  $(v_n)$  en fonction de leur rang.
- Justifier que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n = 8 \times 2^n + 3 \cdot n - 2$

- En déduire la limite de suite  $(u_n)$ .

**Exercice 5737**  

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 ; u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + \frac{1}{3} \cdot n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On désigne par  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$v_n = u_n - n$$

- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$ .
- En déduire que pour tout entier naturel  $n$  :  $u_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$
- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 3285**  

On définit la suite  $(u_n)$  est définie par :

$$u_0 = 1 ; u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite  $(v_n)$  par :  $v_n = 4u_n - 8n + 24$

- Par transformation successive, établir l'égalité suivante :  $v_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot v_n$ .
- En déduire une expression des termes de la suite  $(u_n)$  en fonction de  $n$ .

**12. Autres suites : suites récurrentes d'ordre 2 :****Exercice 3515**   

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} ; u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 8 \cdot u_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite  $(u_n)$ .
- Montrer que la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  
 $s_n = u_{n+1} + u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 est une suite géométrique dont on précisera la raison.  
 En déduire  $s_n$  en fonction de  $n$ .

- On pose  $v_n = (-1)^n \cdot u_n$  et on considère la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $t_n = v_{n+1} - v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $t_n$  en fonction de  $s_n$ .
  - Quel est la nature de la suite  $(t_n)$ .
- Exprimer  $v_n$ , puis  $u_n$ , en fonction de  $n$  (on pourra calculer, de deux manières, la somme  $t_0 + \dots + t_{n-1}$ ).
  - Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{8^n}$ .

### 13. Limites de suites définies explicitement :

#### Exercice 2558



Déterminer les limites des suites  $(u_n)$  définies ci-dessous :

- |                     |                                     |   |
|---------------------|-------------------------------------|---|
| a. $n^3 \times 5^n$ | b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ | c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$      |
| d. $8^n - 3^n$      | e. $\frac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$    | f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$ |

### 255. Partage :

#### Exercice 9010



Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

- Déterminer une relation de récurrence entre  $H_n$  et  $H_{n+1}$ .
- En déduire le sens de variation de la suite  $(H_n)$ .
- Dans le logiciel Xcas, aller dans Prg puis Nouveau programme et taper le programme ci-dessous :

```
saisir(n) ;
H:=1. ;
pour p de 2 jusque n faire
  H:=H+1/p ;
fpour ;
afficher(H) ;
```

- Dans ce programme, que représente la variable  $H$  ?
- À l'aide du programme, calculer les termes  $H_{10}$ ,  $H_{1000}$ ,  $H_{10^5}$ .  
 Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite  $(H_n)$  ?
- Pour représenter la suite graphiquement :
    - modifier le programme précédente en ajoutant la ligne :  

point(p,H) ;

 après le calcul de  $H$ .
    - Exécuter le programme pour  $n = 1000$ .
    - Faire afficher le graphique par Cfg/Montrer/DispG.
  - Le graphique semble-t-il confirmer la conjecture ?

- Soit  $A$  un réel positif, écrire un programme permettant de déterminer la valeur de  $N$ , telle que pour tout  $n \geq N$ , on ait  $H_n > A$ .

Pour information, la syntaxe d'une boucle **tant que** est la suivante :

```
tantque (condition) faire
...
ftantque ;
```

- Tester votre programme pour  $A=2$ ,  $A=5$ ,  $A=10$  et  $A=15$ .
- En supposant, que pour tout réel  $A$  on puisse trouver un entier  $N$  vérifiant la condition ci-dessus, que pourrait-on affirmer ?

**UNE DÉMONSTRATION DE LA DIVERGENCE :** Minoration des paquets

On commence par remarquer que pour tout entier naturel  $k$ ,

$$\frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+1}} \left( \underbrace{2^{k+1} - 2^k}_{=2^k} \right), \text{ d'où : } \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $m$ , en notant posant  $N = 2^{m+1}$ , on a :

$$H_N = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^1 + 1}}_{> \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2 + 1} + \dots + \frac{1}{2^3}}_{> \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^m + 1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{> \frac{1}{2}}$$

Par suite,  $H_N > 1 + \frac{1}{2}(m+1)$ .

De plus, pour tout réel  $A$ ,  $1 + \frac{1}{2}(m+1) > A \Leftrightarrow m > 2A - 3$ .

Soit  $A$  un réel. Il existe un entier  $m$  tel que  $m > 2A - 3$ , et on note  $N$  l'entier défini par  $N = 2^{m+1}$ .

La suite  $H$  étant strictement croissante, pour tout entier  $n \geq N$ , on a  $H_n \geq H_N$ .

Ainsi, d'après la remarque précédente,  $H_n > A$ . Ce qui signifie que la suite  $H$  diverge vers  $+\infty$ .