Compiler exercice — Compiler correction — Plus d'option

Terminale S/Limite de suites

1. Rappels : suites arithmétiques et géométriques :

Exercice 3393

On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

Exercice 3394

On considère la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{16}$

Exercice 5012

1. Soit (u_n) une suite arithmétique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $u_4 = 3 \quad ; \quad u_7 = 15$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (u_n)
2. Soit (v_n) une suite géométrique définie pour $n\in\mathbb{N}$. On a la valeur des deux termes suivants :
   $v_2 = 2 \quad ; \quad v_5 = 54$
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de la suite (v_n).
   b. Donner la formule de récurrence, puis la formule explicite de la suite (v_n)

Exercice 6724

On considère les deux suites de nombres ci-dessous dont on donne les sept premiers termes :

a. 3 ; 5 ; 7 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16

b. 6 ; 3,5 ; 1 ; -1,5 ; -4 ; -6,5 ; -9

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite arithmétique?
Si oui, donner le premier terme et la raison. Si non, justifier votre rejet de cette affirmation.

Exercice 6725

On considère les deux suites de nombres ci-dessous où sont donnés les six premiers termes :

a. $8 \;;\; 4 \;;\; 2 \;;\; 1 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{1}{4}$

b. 1 ; 3 ; 9 ; 18 ; 54 ; 162

Pour chacune des questions, peut-on conjecturer que la suite est une suite géométrique?
Si oui, préciser le premier terme et la raison. Sinon, justifier votre rejet de la conjecture.

Exercice 3398

En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suites arithmétiques ou géométriques, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12+7+2+(-3)+\cdots+(-28)$

b. $27+3+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3}+\frac{8}{3}+\frac{14}{3}+\cdots+\frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^8}+\cdots+\frac{1}{2^{24}}$

2. Rappels : autres :

Exercice 3395

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$
Déterminer la valeur des huit premiers termes de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$v_1 = 2 \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{1}{v_n} + n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
Déterminer les cinq premiers termes de la suite (v_n).

Exercice 3396

Déterminer la valeur de chacune des sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} i$ b. $\displaystyle\sum_{i=3}^{8} (i^2 - i)$ c. $\displaystyle\sum_{i=0}^{7} (i-4)$

d. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i}$ e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i^2}$ f. $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{3} \left[\sum_{i=0}^{\ell} i\right]$

Exercice 5042

Justifier que, dans chaque question, les informations ci-dessous ne définissent pas de suites :

a. $u_0 = 5 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b. $u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n - 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c. $u_0 = 3 \quad ; \quad u_n = 2{\cdot}u_{n-1} - 2 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

d. $u_0 = -1 \quad ; \quad u_n = \dfrac{u_{n-1} - 2}{u_{n-1} + 1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

3. Limites de suites arithmétiques et géométriques :

Exercice 6726

1. On considère la suite (u_n) arithmétique de premier terme -4 et de raison 5 :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	-4	1	6	11	16	21		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite (v_n) arithmétique de premier terme 3 et de raison $-1{,}2$:

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	3	1,8	0,6	$-0{,}6$	$-1{,}8$	-3		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ldots\ldots$

Exercice 6727

1. On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 4 et de raison 2 :

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	4	8	16	32	64	128		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme u_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots\ldots$

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 81 et de raison $\dfrac{1}{3}$:

a. Compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n	81	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$		

b. Quelle conjecture peut-on faire sur la valeur du terme v_n lorsque le rang n devient de plus en plus grand?
On notera : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ldots\ldots$

Exercice 6728

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 2,8 et de raison 0,9.

1. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs approchées au centième :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	2,8	2,52	2,268	2,041				

2. A l'aide de la calculatrice, quelle conjecture peut-on établir pour la limite des termes de la suite (u_n)?

On note : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ldots$

Exercice 2557

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$u_n = 9n - 5$

a. Déterminer la nature de la suite (u_n) en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite (u_n).

2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement par :
$$v_n = 2{\cdot}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a. Déterminer la nature de la suite (v_n) en précisant ses caractéristiques.

b. Déterminer la limite de la suite (v_n).

4. Limites de somme des termes de suites :

Exercice 2559

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison -1.

   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.

   b. On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S_n$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{1}{2}$.

   a. Déterminer l'expression explicite des termes de la suite en fonction du rang n.

   b. On note $S'_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite. Donner l'expression de S'_n en fonction de n.

   c. En déduire la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} S'_n$.

Exercice 2588

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme 2 et de raison $\dfrac{2}{5}$:

1. Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

2. a. Déterminer l'expression de la somme des n premiers termes de cette suite en fonction de n.

   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Exercice 2621

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ géométrique de premier terme 1 et de raison $\dfrac{1}{2}$ et la suite (R_n) définie, pour $n\geqslant 2$, par la somme :
$$R_n = u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$$

Déterminer la limite de la suite (R_n).

Exercice 6174

Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).

2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).

   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.

   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.

3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
S_n					

   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand ?

Exercice 2560

Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Quelle est précisément la nature de la suite ?
   Déterminer la valeur de d_n en fonction de n.

3. On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.
   $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

   a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n.

   b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il gagner ?

   c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

Exercice 5738

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_n = 2\times\Big(\frac{2}{3}\Big)^n + n$$

Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n \quad ; \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}$$

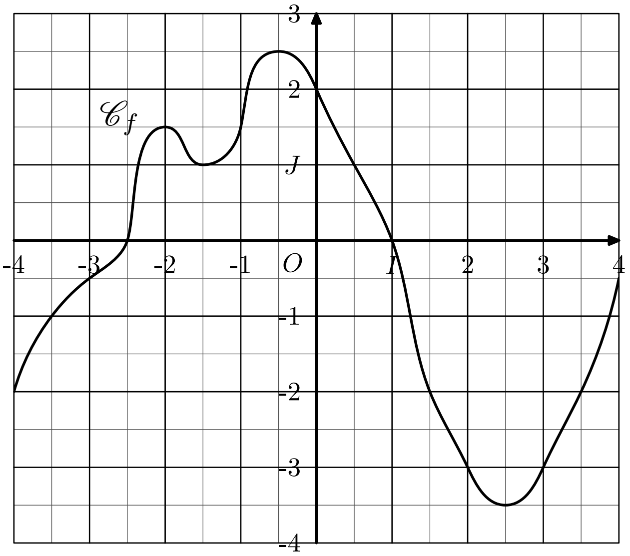
1. Exprimer le terme S_n en fonction de n.

2. Déterminer la limite de la suite (T_n).

5. Autres limites :

Exercice 3397

On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.
2. Justifier les égalités suivantes :

   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$
3. Compléter le tableau suivant :

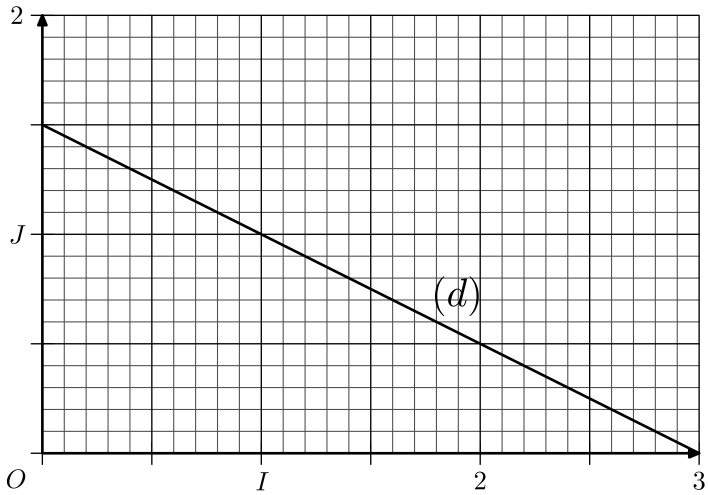
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite (u_n)?

Exercice 3411

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence :
$u_0 = \dfrac{5}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}\cdot u_n + \dfrac{3}{2} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Le graphique ci-dessous représente, dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, la droite (d) ayant pour équation :
$y = -\dfrac{1}{2}\cdot x + \dfrac{3}{2}$



1. Graphiquement, sur l'axe des abscisses représentées les cinq premiers termes de cette suite *(les constructions doivent être laissées)*.
2. a. A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau ci-dessous en indiquant les valeurs approchées au dixième près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2,5	0,25	1,38	0,81	1,09					

   b. Quelle conjecture peut-on porter sur la limite de la suite (u_n)?

6. Avec un tableur :

Exercice 6732

Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de chacune des suites suivantes. Si nécessaire, on arrondi les valeurs au centième près :

1. Soit (u_n) définie par la relation :
   $u_n = 2\cdot n + 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

2. Soit (v_n) définie par la relation :
   $v_0 = 5 \quad ; \quad v_{n+1} = 0{,}75\cdot v_n + 3 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   Soit (w_n) définie par la relation :
   $w_n = v_n - 12 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

   a. Compléter le tableau de valeurs :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
v_n								
w_n								

   b. Vérifier que les 8 termes de la suite (w_n) permettent de conjecturer que la suite (w_n) est géométrique.
3. Soit (t_n) définie par la relation :
   $t_0 = 0 \quad ; \quad t_1 = 1 \quad ; \quad t_{n+1} = t_n + t_{n-1} \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n								

4. Soit (a_n) et (b_n) définies par les relations :
$\begin{cases} a_0=2 \\ b_0=-1 \end{cases}$; $\begin{cases} a_{n+1}=2\cdot a_n- \ b_n \\ b_{n+1}= \ a_n+3\cdot b_n \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n								
b_n								

Exercice 6731

On définit les deux suites u et v par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 12 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cdot(u_n+2\cdot v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}\cdot(u_n+3\cdot v_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. A l'aide d'un tableur, générer les 20 premiers termes des ces deux suites afin d'obtenir un tableau analogue à celui présenté ci-contre.

	A	B	C	D	E
1	x_n	y_n	w_n		t_n
2	1	12			
3	8,33	9,25			
4	8,94	9,02			
5	9,00	9,00			
6	9,00	9,00			

2. On définit la suite (w_n) par : $w_n=v_n-u_n$
   a. Dans la colonne C, exprimer les 20 premiers termes de la suite w.
   b. Que peut-on faire pour mettre en évidence que la suite w suit une progression géométrique sur ces 20 premiers termes?
2. On définit la suite t définie par : $t_n=3\cdot u_n+8\cdot v_n$
   a. Exprimer les 20 premiers termes de la suite t.
   b. Quelle conjecture peut-on effectuer sur la nature de la suite t?

7. Suites arithmético-géométriques :

Exercice 6733

On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = 8$; $u_{n+1} = 0{,}95\cdot u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
   $v_n = u_n - 10$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 6734

On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = -2$; $u_{n+1} = 2\cdot u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
   $v_n = u_n + 0{,}5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

8. Suites homographiques et suites géométriques :

Exercice 5734

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \; ; \; u_{n+1} = \frac{1+0.5\cdot u_n}{0{,}5+u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n>1$

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
   $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6737

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 3 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{2-u_n}{u_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont différent de -2 et de 0.

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2415

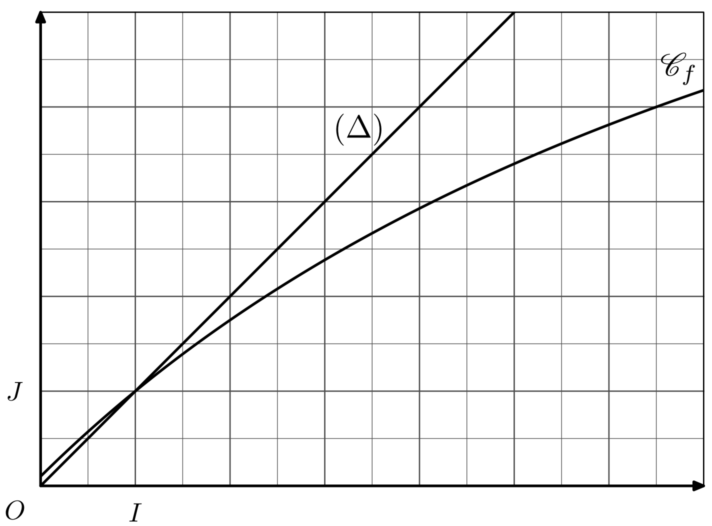
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{13}{2} \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{10{\cdot}u_n + 1}{u_n + 10} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On admet que les termes de la suite (u_n) sont strictement supérieurs à 1.

1. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{10{\cdot}x+1}{x+10}$

   On représente ci-dessous, dans le repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f et la première bissectrice (Δ) du plan.



   a. Représenter sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n)
   b. Faire une conjecture quant à la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \text{ pour tout entier } n\in\mathbb{N}.$$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   b. Donner l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang n.
3. a. Etablir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$$
   b. En déduire l'expression des termes de la suite (u_n) en fonction de leur rang n.
4. Déterminer la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3517

Une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par son premier terme U_1 et la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{6+U_n}{2+U_n} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a et b de U_1 $(a<b)$ pour lesquelles la suite est constante.
2. a. Montrer que si $U_1\neq a$ et $U_1\neq b$, il en est de même de U_n.
   b. Dans ces conditions, calculer :
$$\frac{U_{n+1}-a}{U_{n+1}-b} \quad \text{en fonction de} \quad \frac{U_n - a}{U_n - b}$$
3. On suppose que $U_1\neq a$ et $U_1\neq b$ et on considère la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$V_n = \frac{U_n - a}{U_n - b} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$
   a. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
   b. Calculer la limite de $|V_n|$ quand n tend vers plus l'infini. En déduire celle de U_n.

9. Suites homographiques et suites arithmétiques :

Exercice 5852

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0{=}5 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{4{\cdot}u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$

On définit les termes de la suite (u_n) par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.
2. Pour tout entier naturel ,, exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 6736

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par la relation :

$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2 \cdot u_n + 3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que pour tous les termes de la suite (u_n) sont définis et qu'ils vérifient : $u_n > -1$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera les élèments caractéristiques.

   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.

2. a. Etablir l'égalité :

$$u_n = \frac{4 - 10 \cdot n}{1 + 10 \cdot n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   b. Montrer que les termes de la suite (u_n), pour $n \geqslant 1$, admettent l'expression :

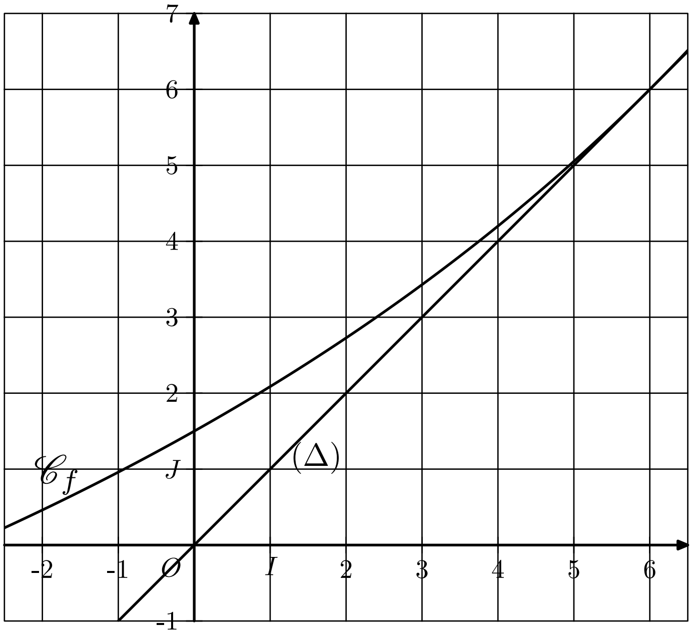
$$u_n = \frac{\frac{4}{n} - 10}{\frac{1}{n} + 10}$$

   c. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3400

Dans le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on considère la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = -\frac{12x + 36}{x - 24}$$



La droite (Δ) est la première bissectrice du plan.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On admet que la suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ et que ses termes vérifient la comparaison : $u_n < 6$

1. Graphiquement, placer sur l'axe des abscisses les cinq premières valeurs de la suite (u_n).

2. Déterminer, par le calcul, la valeur des trois premiers termes de la suite (u_n).

3. On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$w_n = \frac{1}{u_n - 6} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Etablir l'égalité suivante : $w_{n+1} - w_n = -\dfrac{1}{18}$

   b. Donner la nature et les caractéristiques de la suite (w_n) ainsi que l'expression du terme w_n en fonction de n.

   c. Déterminer l'expression du terme u_n en fonction de n.

4. En déduire la limite de la suite (u_n)

10. Suites définies conjointements :

Exercice 6739

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2 \cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On considère la suite (w_n) définie par la relation :

$$w_n = v_n - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

   a. Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 5.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :

$$w_n = -5^n$$

2. On considère la suite (t_n) définie par :

$$t_n = 3 \cdot u_n + v_n$$

   a. Montrer que : $t_0 = 19$

   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité : $t_{n+1} = t_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$

3. Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6738

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} u_{n+1} = 3{\cdot}u_n - 2{\cdot}v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2{\cdot}v_n \end{cases}$$

1. On considère la suite (w_n) définie par la relation :
$w_n = v_n - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a. Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
   $w_n = -4\times 4^n$
2. On considère la suite (t_n) définie par :
$t_n = 4{\cdot}u_n + 8{\cdot}v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a. Donner la valeur du terme t_0.
   b. Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
   $t_{n+1} = t_n$

   On admettra que la suite (t_n) est constante.
3. Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.
4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 6759

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :
$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2{\cdot}a_n + 1{,}3{\cdot}b_n \\ b_{n+1} = -0{,}8{\cdot}a_n - 0{,}2{\cdot}b_n \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Exprimer les termes a_{n+2} et b_{n+2} en fonction des termes a_n et b_n.
2. Que peut-on dire des termes de la suite (a_{2n})?

11. Autres suites :

Exercice 6765

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = 0{,}5{\cdot}u_n + 0{,}5{\cdot}n - 1{,}5$

1. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = 0{,}1{\cdot}u_n - 0{,}1{\cdot}n + 0{,}5$

   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 10\times 0{,}5^n + n - 5$
3. Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

Exercice 6799

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 6$; $u_{n+1} = 2{\cdot}u_n - 3{\cdot}n + 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. Donner les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = u_n - 3{\cdot}n + 2$
   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
   b. En déduire une expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang.
3. a. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n = 8\times 2^n + 3{\cdot}n - 2$
   b. En déduire la limite de suite (u_n).

Exercice 5737

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2 \; ; \; u_{n+1} = \frac{2}{3}{\cdot}u_n + \frac{1}{3}{\cdot}n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$v_n = u_n - n$

1. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n :
$$u_n = 2{\cdot}\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3285

On définit la suite (u_n) est définie par :
$$u_0 = 1 \; ; \; u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$
On définit la suite (v_n) par : $v_n = 4u_n - 8n + 24$

1. Par transformation successive, établir l'égalité suivante :
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}{\cdot}v_n.$$
2. En déduire une expression des termes de la suite (u_n) en fonction de n.

12. Autres suites : suites récurrentes d'ordre 2 :

Exercice 3515

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \quad ; \quad u_{n+1} = 7 \cdot u_n + 8 \cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n.

3. a. On pose $v_n = (-1)^n \cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Exprimer t_n en fonction de s_n.

b. Quel est la nature de la suite (t_n).

4. a. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0 + \cdots + t_{n-1}$).*

b. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

13. Limites de suites définies explicitement :

Exercice 2558

Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a. $n^3 \times 5^n$ b. $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c. $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d. $8^n - 3^n$ e. $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f. $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

255. Partage :

Exercice 9010

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre H_n et H_{n+1}.

2. En déduire le sens de variation de la suite (H_n).

3. a. Dans le logiciel Xcas, aller dans Prg puis Nouveau programme et taper le programme ci-dessous :

```
saisir(n);
H:=1.;
pour p de 2 jusque n faire
 H:=H+1/p;
fpour;
afficher(H);
```

b. Dans ce programme, que représente la variable H ?

c. À l'aide du programme, calculer les termes H_{10} , H_{1000} , H_{10^5} .
Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la suite (H_n) ?

4. a. Pour représenter la suite graphiquement :
- modifier le programme précédente en ajoutant la ligne :

```
point(p,H);
```

après le calcul de H.
- Exécuter le programme pour $n = 1000$.
- Faire afficher le graphique par Cfg/Montrer/DispG.

b. Le graphique semble-t-il confirmer la conjecture ?

5. a. Soit A un réel positif, écrire un programme permettant de déterminer la valeur de N, telle que pour tout $n \geqslant N$, on ait $H_n > A$.
Pour information, la syntaxe d'une boucle ***tant que*** *est la suivante :*

```
tantque (condition) faire
 ...
ftantque;
```

b. Tester votre programme pour $A = 2$, $A = 5$, $A = 10$ et $A = 15$.

c. En supposant, que pour tout réel A on puisse trouver un entier N vérifiant la condition ci-dessus, que pourrait-on affirmer ?

Une démonstration de la divergence : Minoration des paquets

On commence par remarquer que pour tout entier naturel k,

$$\frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2^{k+1}}\left(\underbrace{2^{k+1} - 2^k}_{=2^k}\right), \text{ d'où : } \frac{1}{2^k+1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel m, en notant posant $N = 2^{m+1}$, on a :

$$H_N = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2^1+1} + \frac{1}{2^2}}_{>\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^3}}_{>\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^m+1} + \dots + \frac{1}{2^{m+1}}}_{>\frac{1}{2}}$$

Par suite, $H_N > 1 + \frac{1}{2}(m+1)$.

De plus, pour tout réel A, $1 + \frac{1}{2}(m+1) > A \Leftrightarrow m > 2A - 3$.

Soit A un réel. Il existe un entier m tel que $m > 2A - 3$, et on note N l'entier défini par $N = 2^{m+1}$.

La suite H étant strictement croissante, pour tout entier $n \geqslant N$, on a $H_n \geqslant H_N$.

Ainsi, d'après la remarque précédente, $H_n > A$. Ce qui signifie que la suite H diverge vers $+\infty$.

