Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

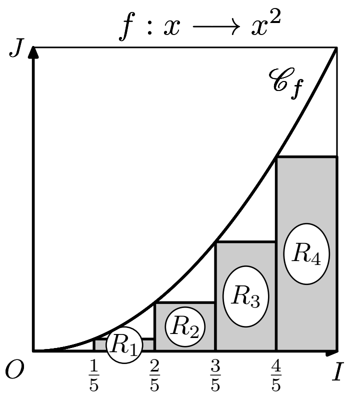
Terminale S/Intégration

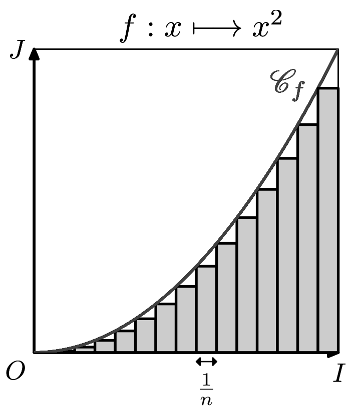
1. Introduction :

Exercice 3921

On considère la fonction carré, notée f et sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

On construit des rectangles pour "*remplir*" l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.





Les deux représentations ci-dessous partagent l'intervalle $[0\,;1]$ en n parties égales formant des rectangles de même largeur :

- pour la figure de gauche $n=5$;
- la figure de droite représente une figure quelconque.

Partie A : $n=5$

On note $\mathcal{A}_5$ l'aire grisée située sous la courbe.

1. Justifier l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\cdot\Big(\frac{k}{5}\Big)^2$

2. Etablir l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \dfrac{6}{25}$

Partie B : dans le cas général

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{A}_n$ l'aire hachurée sous la courbe $\mathscr{C}_f$ lorsque le segment $[0\,;1]$ est divisé en n parties égales. On admet que cette aire a pour valeur :

$$\mathcal{A}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n}\cdot\Big(\frac{k}{n}\Big)^2$$

1. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$:
$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6}$$

2. En déduire l'égalité suivante : $\mathcal{A}_n = \dfrac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6\cdot n^3}$

3.
   a. Déterminer la valeur de la limte :
   $$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3}$$
   b. En déduire la mesure de l'aire comprise :
   - verticalement : entre les deux droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
   - horizontalement : entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=0$.

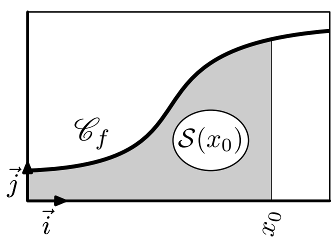
Exercice 3922

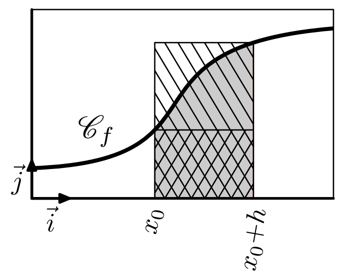
Soit f une fonction continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Pour $a\in\mathbb{R}_+$, on note $\mathcal{S}(a)$ l'aire comprise :

- verticalement : entre les droites d'équations : $x=0$ et $x=a$;
- horizontalement : entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y=0$.

La figure de gauche présente l'image de x_0 par la fonction $\mathcal{S}$:





On souhaite déterminer la fonction dérivée de la fonction $\mathcal{S}$. Pour cela, on considère le nombre réel h où $h>0$ et la figure de droite ci-dessus.

1. Cette représentation met en évidence les trois aires suivantes :

   $\mathcal{A}_1$ ▧ $\mathcal{A}_2$ ▨ $\mathcal{A}_3$ ▩

   Laquelle de ces aires représentent l'aire définie par : $\mathcal{S}(x_0+h) - \mathcal{S}(x_0)$

2.
   a. Comparer les trois aires $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.

   b. Donner un encadrement de la différence ci-dessous, à l'aide de la fonction f, de x_0 et de h :
   $\mathcal{S}(x_0+h) - \mathcal{S}(x_0)$

3. En déduire la limite suivante :
$$\lim_{h\mapsto 0^+} \frac{\mathcal{S}(x_0+h)-\mathcal{S}(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Exercice 6911

Compléter les pointillés :

1. On note f une fonction vérifiant : $f'(x)=2\cdot x$.
   Une expression possible de f est :

   $f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. On note g une fonction vérifiant : $g'(x)=x^2$.
   Une expression possible de g est :

   $g(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. On note h une fonction vérifiant : $h'(x)=-2$.
   Une expression possible de h est :

   $h(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. On note j une fonction vérifiant : $j'(x)=\dfrac{1}{x^2}$.
   Une expression possible de j est :

   $j(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. On note k une fonction vérifiant : $k'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   Une expression possible de k est :

   $k(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. On note ℓ une fonction vérifiant : $\ell'(x)=\mathrm{e}^x$.
   Une expression possible de ℓ est :

   $\ell(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

7. On note m une fonction vérifiant : $m'(x)=\dfrac{1}{x}$.
   Une expression possible de m est :

   $m(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 5206

Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

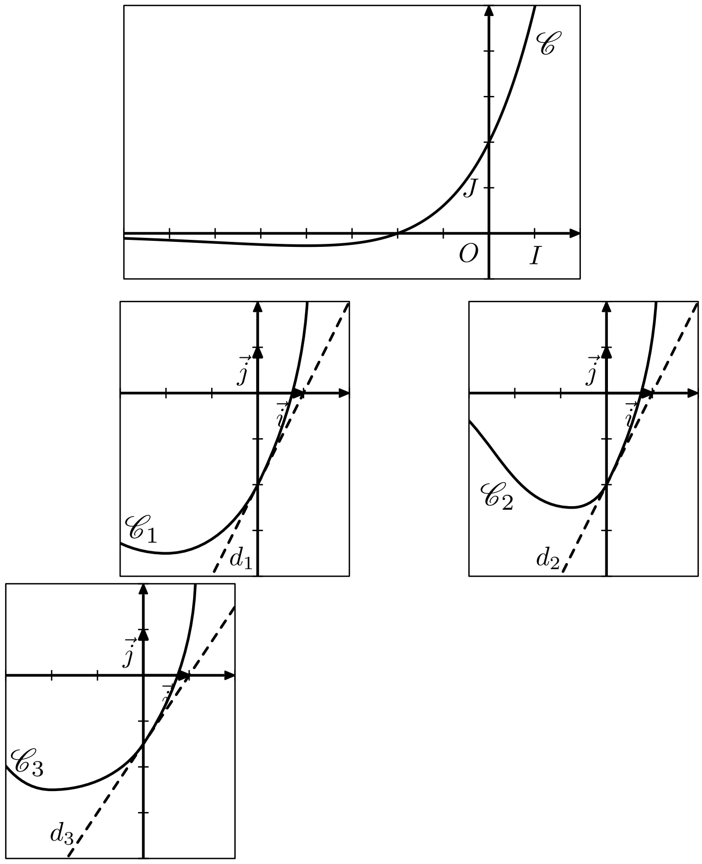
a. $f'(x) = 3$ b. $f'(x) = 2x+1$ c. $f'(x) = x^3$

d. $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

Exercice 6010

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.



1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une fonction vérifiant la condition suivante :
   $F' = f \qquad (i.e.\ \forall x\in\mathcal{D}_f,\ F'(x)=f(x))$

   a. A l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

   b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

2. Premières manipulations des primitives :

Exercice 6912

Donner une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = 2\cdot x + 1$ b. $g(x) = 1 - \dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c. $h(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ d. $j(x) = \mathrm{e}^{2\cdot x}$

Exercice 5231

Soit f une fonction strictement positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.
On considère la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par la relation :
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

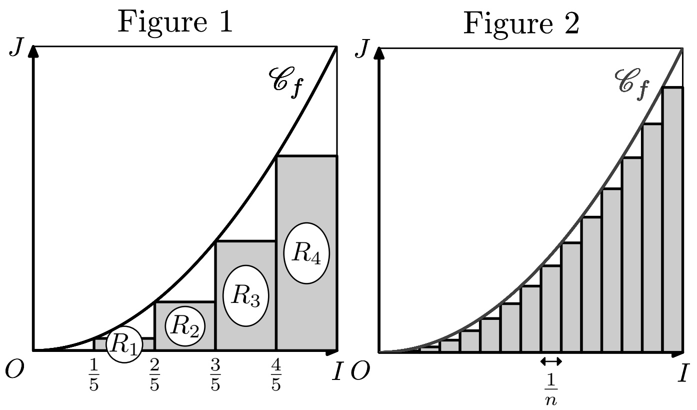
1. Dresser le tableau de variations de la fonction F sur l'intervalle $[a\,;b]$.

2. Justifier l'existence d'un unique réel x_0 vérifiant :
   $F(x_0) = \dfrac{1}{2}\cdot F(b)$

Exercice 6756

On considère la fonction carré, notée f et sa courbe $\mathscr{C}_f$ représentative dans le repère $(O\,;I\,;J)$.

On construit des rectangles pour "*remplir*" l'aire située entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.



Les deux représentations ci-dessous partagent l'intervalle $[0\,;1]$ en n parties égales formant des rectangles de même largeur :

- pour la figure de gauche $n=5$;
- la figure de droite représente une figure quelconque.

Partie A : $n=5$

Dans la figure 1, on note $\mathcal{A}_5$ l'aire de la partie grisée.

1. Justifier l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{k}{5}\right)^2$

2. Etablir l'égalité : $\mathcal{A}_5 = \frac{6}{25}$

Partie B : avec OpenCal

1. a. Dans une nouvelle feuille de calcul, saisir les valeurs suivantes :

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	6					
2							
3	0	1	2	3	4	5	
4							
5							
6	A=						

   b. Saisir dans la cellule `A4` la formule :
   `=1/$B$1*(A3/$B$1)^2`
   Etendre cette formule sur la plage `A4:F4`.

   c. Ecrire une formule dans la cellule `B6` donnant la somme des valeurs présentes dans la ligne `4`.

   d. Justifier que cette valeur est la valeur approchée de $\mathcal{A}_6$.

2. Modifier votre feuille de calcul pour calculer $\mathcal{A}_7$.

3. De même pour obtenir une valeur approché de $\mathcal{A}_{50}$.

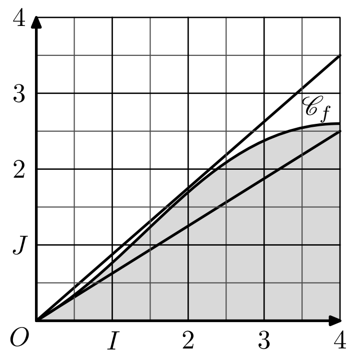
3. Calcul d'aires :

Exercice 3929

On considère la fonction f, définie sur $[0\,;4]$, dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

Déterminer un encadrement de l'intégrale :

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$$



4. Détermination d'une primitive d'une fonction de référence :

Exercice 5207

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x+1$ b. $g(x) = 1-3x$ c. $h(x) = 2x^2$

d. $i(x)=x^2+x+1$ e. $j(x) = 4x^3$ f. $k(x) = 1-2x^2$

Exercice 3992

Déterminer une primitive de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ b. $g(x) = \frac{2}{x^2}$ c. $h(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$

d. $j(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ e. $k(x) = \frac{1}{x}$ f. $\ell(x) = -\frac{1}{2x}$

g. $m(x) = \mathrm{e}^x$ h. $n(x) = 3\mathrm{e}^x$ i. $p(x) = -\mathrm{e}^x$

5. Détermination d'une primitive de la composée de fonctions :

Exercice 5209

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (x+3)^4$
b. $g(x) = (2-x)^3$
c. $h(x) = (2x-3)^2$
d. $j(x) = x{\cdot}(x^2+1)^6$
e. $k(x) = 3x^2{\cdot}(x^3-2)^3$
f. $\ell(x) = x^4{\cdot}(1-x^5)^2$

Exercice 5221

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 3x - 5x^5$
b. $g(x) = \dfrac{1}{x} - x$
c. $h(x) = x{\cdot}\big(2x^2-3\big)^4$
d. $j(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x^2-4x}}$
e. $k(x) = \dfrac{6x+2}{3x^2+2x-3}$
f. $\ell(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2}$

Exercice 5210

Déterminer une primitive des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{2}{2x+3}$
b. $g(x) = \dfrac{1}{1-3x}$
c. $h(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$
d. $j(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$
e. $k(x) = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$
f. $\ell(x) = \dfrac{x}{x^4+2x^2+1}$

6. Quelques primitives particulières :

Exercice 6006

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x) = \big(x-1\big){\cdot}\mathrm{e}^x$
Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^x$

Exercice 6005

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par l'expression :
$f(x) = \dfrac{2}{3}{\cdot}x{\cdot}\sqrt{x}$
Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.
2. En déduire l'expression d'une primitive de la fonction racine carrée.

7. Recherche d'une primitive :

Exercice 5222

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\big]1\,;+\infty\big[$ par :
$g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$

1. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x>1$:
$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$$
2. Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $\big]1\,;+\infty\big[$.

8. Détermination d'une primitive avec confition initiale :

Exercice 3950

Pour chaque question, déterminer la primitive de la fonction vérifiant la condition proposée :

a. $f(x) = \dfrac{x^2-2{\cdot}x+4}{x} \quad ; \quad F(1) = 2$
b. $g(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{x^2} \quad ; \quad G(1) = 3{\cdot}e$
c. $h(x) = \dfrac{5}{(4{\cdot}x-3)^2} \quad ; \quad H(1) = 1$
d. $j(x) = \dfrac{2{\cdot}x-3}{x^2-2x+1} \quad ; \quad J(0) = -2$

Exercice 6917

On considère les deux fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \ln\big(x^2+1\big) \quad ; \quad g(x) = \ln\big(2{\cdot}x^2+2\big)$

1. Déterminer l'image de 0 par chacune de ces deux fonctions.
2. Etablir que ces deux fonctions sont des primitives d'une même fonction qu'on précisera.

9. Calcul d'integrales :

Exercice 3951

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-3}^{2} x+1\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_{0}^{5} (2x-5)^2\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1-x)^3\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x}{(2\cdot x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_{4}^{6} \frac{2\cdot x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3995

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$g(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^{-x}$

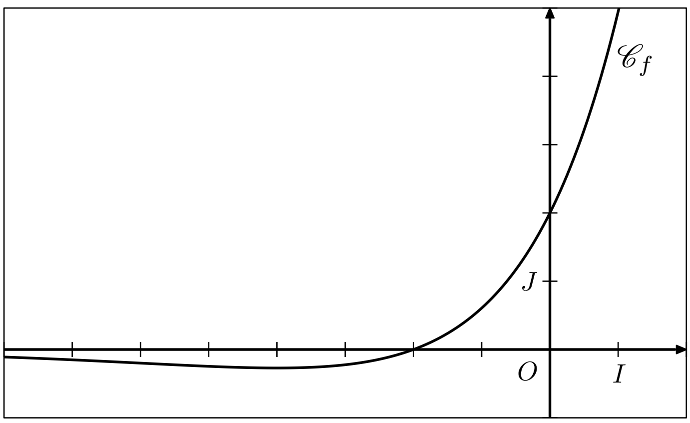
1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
   $H(x)=-(x^2+2\cdot x)\cdot\mathrm{e}^{-x}$
   Calculer la dérivée H' de la fonction H.
2. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la fonction g.
3. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 6011

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(x+2)\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.



On pose : $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Interpréter géométriquement le réel I.
2. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $u(x)=x$; $v(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$
   Vérifier que : $f=2\cdot(u'\cdot v+u\cdot v')$.
3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.

Exercice 3979

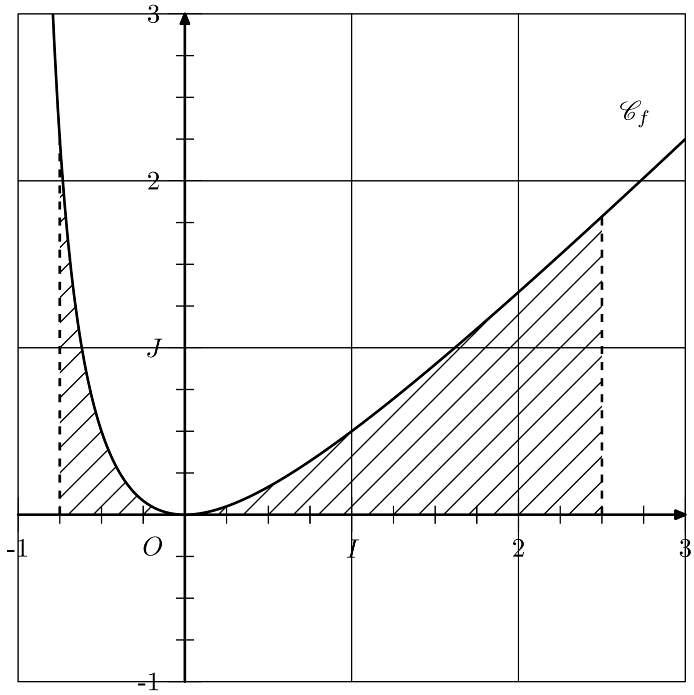
Soit n un entier naturel non-nul, on définie la fonction f_n par :

$$f_n(x)=\frac{4\cdot\mathrm{e}^{n\cdot x}}{\mathrm{e}^{n\cdot x}+7}$$

1. Pour n un entier naturel non-nul, déterminer une primitive de la fonction f_n.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
   $$u_n=\frac{n}{\ln 7}\cdot\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
   Montrer que la suite (u_n) est constante.

Exercice 3967

1. Soit f la fonction f définie sur $\mathcal{D}=]1\,;+\infty[$ par la relation :
   $$f(x)=\frac{x^2}{x+1}$$
   La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère $(O\,;I\,;J)$, on a :



   a. Déterminer la valeur des nombres réels a, b et c vérifiant l'égalité suivante pour tout $x\in\mathcal{D}$:
   $$f(x)=a\cdot x+b+\frac{c}{x+1}$$
   b. Déterminer l'expression d'une primitive de la fonction f.
   c. Calculer, en unités d'aires, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations :
   $$x=-\frac{3}{4}\quad;\quad x=\frac{5}{2}\quad;\quad y=0$$
   d. Sachant que cette représentation est réalisée avec l'échelle : 1 unité $=1{,}5\,cm$
   Donner l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 arrondi à l'unité.
2. Calculer les intégrales suivantes :

   a. $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\cdot\mathrm{e}^{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x\cdot\mathrm{e}^{x^2}}{(\mathrm{e}^{x^2}+1)^2}\,\mathrm{d}x$

10. Linéarité de l'intégrale :

Exercice 5233

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx \quad ; \quad J=\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$$

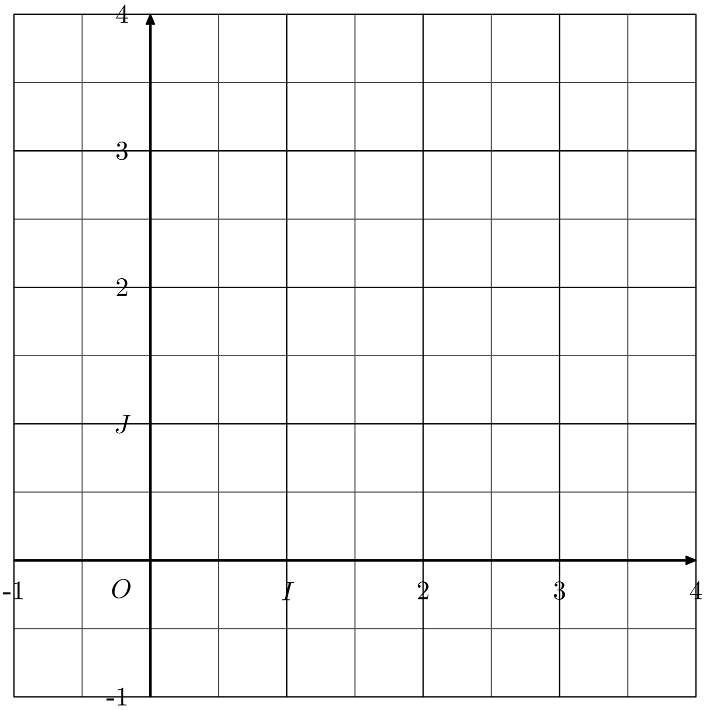
1. Justifier l'égalité : $I+J=1$.
2. (a.) Déterminer la valeur de l'intégrale I.
   (b.) En déduire la valeur de l'intégrale J.

11. Relation de Chasles :

Exercice 5234

On considère la fonction partie entière E qui renvoie à tout nombre réel sa partie entière.

1. Dans le repère ci-dessous, représenter la courbe représentative de la fonction E sur l'intervalle $\big[-1\,;4\big]$.



2. Déterminer la mesure de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^4 E(x)\,dx$

12. Positivité de l'intégrale :

Exercice 3978

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et admettant le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		e		$+\infty$
Variation de f					$\ln 5$		
			0				
	$-\infty$						0

Déterminer, si possible, le signe des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,dx$ b. $\displaystyle\int_{-2}^0 f(x)\,dx$ c. $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx$

d. $\displaystyle\int_3^e f(x)\,dx$ e. $\displaystyle\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} f(x)\,dx$ f. $\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{2}}} f(x)\,dx$

Exercice 6018

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $\big[0\,;1\big]$ par la relation :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{1+x}$$

On définit la suite $\big(u_n\big)$ de nombres réels par :

$$u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Etablir, pour tout entier naturel n, la comparaison :

$$u_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente et converge vers 0.

Exercice 3977

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par la relation :

$$f(x) = x^n\cdot\sqrt{x} \quad \text{pour } x\in[0\,;1]$$

On considère la suite (u_n) définie, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$u_n = \int_0^1 x^n\cdot\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

1. Justifier que tous les termes de la suite sont positifs.
2. En étudiant le signe de la fonction :
   $x \longmapsto x^{n+1}\cdot\sqrt{x} - x^n\cdot\sqrt{x}$,
   Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

13. Positivité de l'intégrale et bornes variables :

Exercice 3973

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation :

$$u_n = \int_0^n x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Justifier que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6915

Soit f la fonction définie et dérivale sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
   $\mathrm{e}^x - x \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^x}{2}$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$I_n \leqslant \int_0^n 2\cdot x\cdot\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $H(x) = (-x-1)\cdot\mathrm{e}^{-x}$.
   Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_n \leqslant 2$.
3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

14. Etude de fonctions et intégrales :

Exercice 6920

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = a\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x} + a$$

On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 :

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x$$

Existe-t-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2? Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Exercice 5237

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\Big(\frac{x}{x+1}\Big)$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle :
   $$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$
   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n :
   $u_{n+1} - u_n = f(n)$
   où f est la fonction définie dans la partie **A**.
   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité :
   $$\int_k^{k+1}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\Big)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
   En déduire que : $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$
   Démontrer l'inégalité : $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$
   b. Ecrire l'inégalité précédente en remplaçant successive-

ment k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n :

$$\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n :
$u_n \geqslant 0$

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

15. Etude de familles de fonctions et intégrale :

Exercice 5242

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

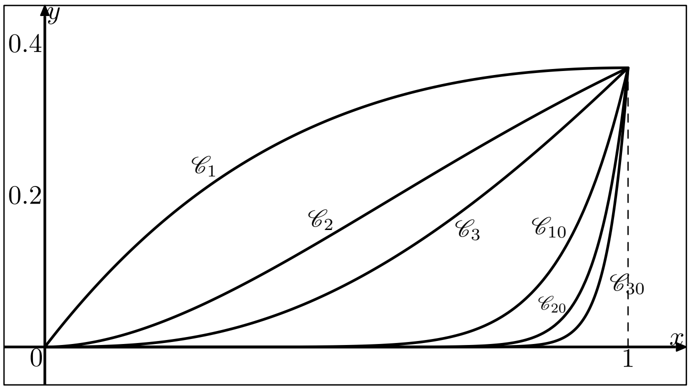
$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

1. a. On considère les deux fonctions f et g définies par :
$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-x}$; $g(x) = (-x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$
Montrer que la fonction g est une primitive de la fonction f.

b. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions de courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n$.

Exercice 5236

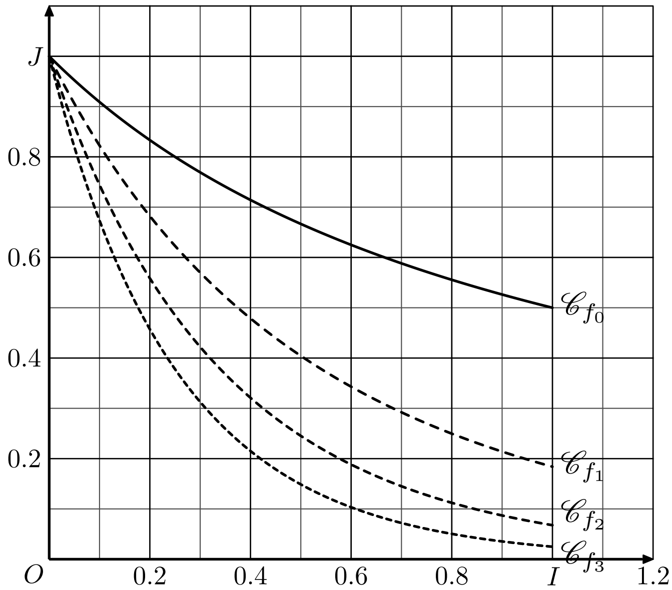
On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad J_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x}$$

pour différentes valeurs de n.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$:

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$$

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

16. Calcul d'aires :

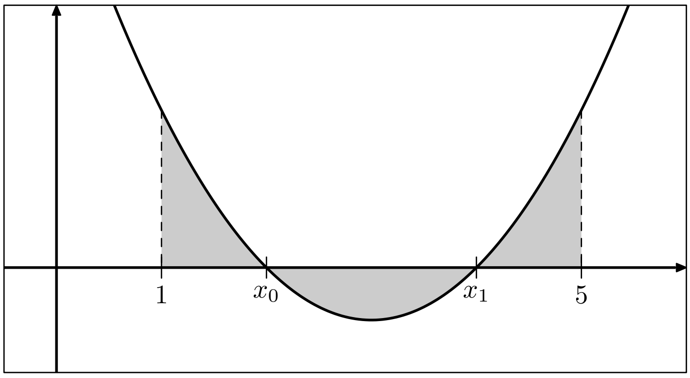
Exercice 5224

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3x + 4$$

1. Déterminer la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Ci-dessous est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer la valeur de l'aire de la partie présentée en gris.

a. Déterminer les zéros de la fonction f qu'on notera x_0 et x_1 tels que $x_0 < x_1$.

b. Déterminer la valeur de : $\displaystyle\int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x$

c. Déterminer la valeur de : $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$

d. En déduire l'aire, en unité d'aire, de la partie grisée.

Exercice 3975

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Dire si la proposition suivante est exacte ou non. Justifier votre réponse.

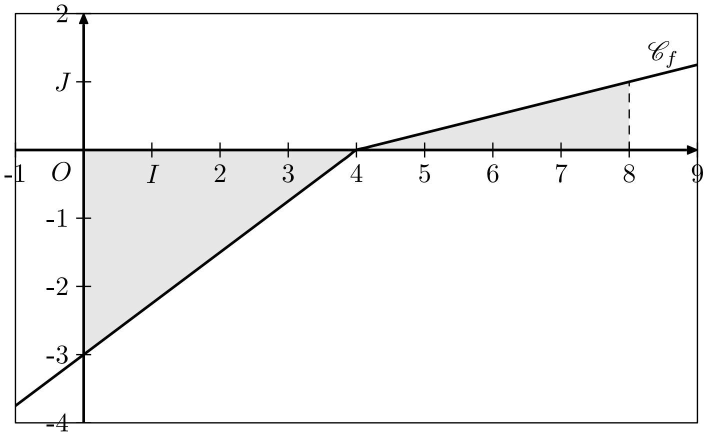
Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

Exercice 5238

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - 2 - \frac{1}{4}\cdot|x-4|$$

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



On souhaite déterminer l'aire de la partie hachurée.

1. Simplifier l'expression de la fonction f sur chacun des intervalles $[0\,;4]$ et $[4\,;8]$.

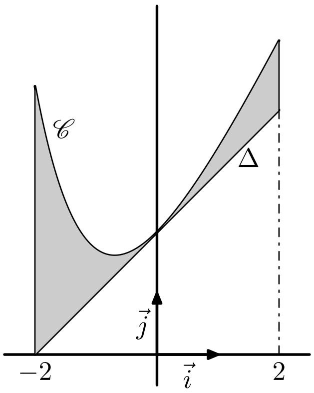
2. Déterminer l'aire de la surface grisée.

17. Aire d'un domaine compris entre deux courbes :

Exercice 126

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}$ et Δ où :

- la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \mathrm{e}^{-x} + 2x + 1$
- la droite Δ a pour équation réduite : $y = x+2$



On considère le domaine grisée représenté ci-dessus et défini par :

- situé entre les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$;
- situé entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

1. a. Etudier les variations de la fonction de la fonction f définie par : $g(x) = f(x) - (x+2)$.

   b. Justifier que la droite Δ est située sous la courbe $\mathscr{C}$

2. Déterminer l'aire du domaine grisé.

Exercice 6918

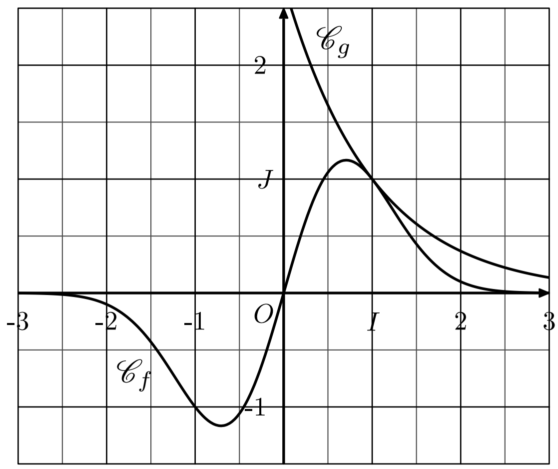
On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}$$

et la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentativees $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.



On admet que, sur $\mathbb{R}$, la courbe $\mathscr{C}_g$ se situe au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire la valeur de : $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\cdot\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.

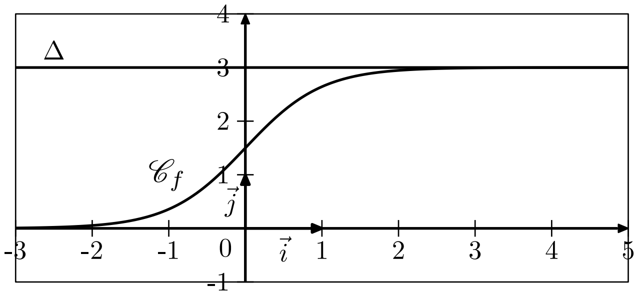
3. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 6913

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y=3$.



Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=3-f(x)$

1. Justifier que la fonction h est positive.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$H(x) = -\frac{3}{2}\cdot\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$$
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale :
   $$\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$$
   b. Démontrer que : $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\cdot\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par :
   $$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$

18. Moyenne d'une fonction :

Exercice 4013

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x) = \frac{4\cdot\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+7}$$

1. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $\left[0\,;\ln 7\right]$.

Exercice 4015

Pour la question ci-dessous, trois réponses sont proposées dont une seule exacte. Le choix d'une réponse doit être justifié :

La valeur moyenne de la fonction f est définie sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

a. $-\dfrac{\pi}{2}$ b. $\dfrac{\pi}{4}$ c. $\dfrac{\pi}{2}$

19. Un peu plus loin :

Exercice 4019

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^-x}$$

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

On note v la primitive de u sur $\mathbb{R}$ telle que $v(1)=\dfrac{\pi}{4}$. On admet que la courbe représentative de v admet en $+\infty$ une asymptote d'équation $y=\dfrac{\pi}{2}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2+1}$
2. Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction :
   $$x \longmapsto v\left(\mathrm{e}^x\right).$$
3. On considère la suite $\left(J_n\right)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
   $$J_n = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$
   On admet que la suite $\left(J_n\right)$ est convergente et admet pour limite un réel L.

   Déterminer la valeur exacte de L.

