Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminale S/Fonctions trigonométriques

1. Rappels :

Exercice 5269

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

a. $\sin\left(3\pi+x\right)$ b. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$

e. $\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

f. $3\cdot\sin\left(\pi+x\right)-2\cdot\sin\left(\pi-x\right)+4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$

Exercice 5267

Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

a. $\tan\left(x+\pi\right)$ b. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ c. $\cos\left(x-\pi\right)$

d. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ e. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ f. $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice 5273

1. En remarquant que : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$

   Déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\frac{7\pi}{12}$; $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 5274

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b)\cdot\cos(a-b)=\sin a\cdot\cos a+\cos b\cdot\sin b$$

Exercice 5272

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

   a. $\left\{\cos x \mid x\in\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{2\pi}{3}\right]\right\}$

   b. $\left\{\sin x \mid x\in\left[\frac{2\pi}{3}\,;\frac{7\pi}{3}\right]\right\}$

2. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$:

   a. $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\cos x\geqslant-\frac{1}{2}$ c. $\cos x<0$

Exercice 3345

Résoudre, dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$, les deux équations suivantes :

a. $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ b. $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c. $\cos\left(2x\right)=\cos\frac{\pi}{4}$ d. $\cos x=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 5276

1. Simplifier l'expression suivante :
   $$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Etablir l'égalité suivante :
   $$\frac{\sin 5x}{\sin 2x}+\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{\left(\sin 3x\right)^2}{\sin(2x)\cdot\sin(x)}$$

3. Résoudre, dans l'intervalle $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation suivante :
   $$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}\sin(2x)=\cos\frac{\pi}{7}$$

2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus :

Exercice 2556

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 :
   $$u_n=\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; préciser sa limite :
   $$u_n=\frac{2n^2+\cos n}{3n^2+5}$$

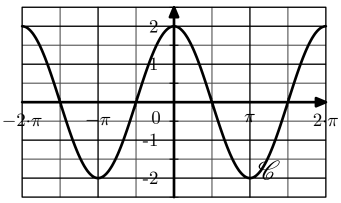
Exercice 3302

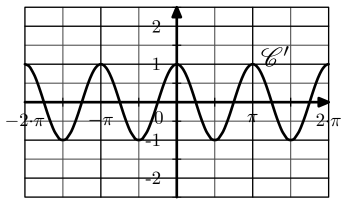
On considère les deux fonctions suivantes f et g définies sur

$\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cdot\cos\left(x\right) \quad ; \quad g(x) = \cos\left(2\cdot x\right)$$

Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :

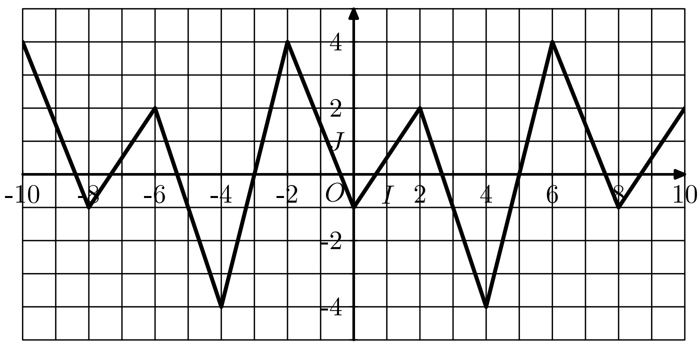




3. Périodicité et parité :

Exercice 2920

Dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé, on représente ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



La fonction f est périodique de période T.

1. a. Déterminer, parmi les coordonnées ci-dessous, celle*(s)* d'un vecteur par lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante :

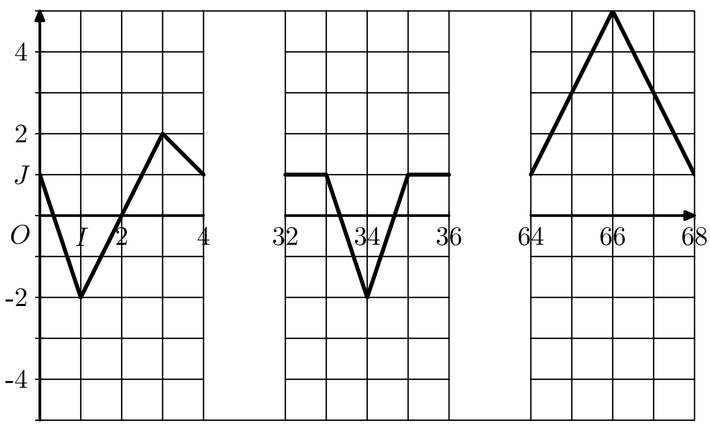
   b. Déterminer la valeur de T.

2. Donner l'image, par la fonction f, des nombres suivants :

   a. 14   b. -16 c. 56   e. 58

Exercice 2922

On considère la fonction f périodique de période 12. Ci-dessous est donnée quelques parties de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f :



1. Reconstruire le tracé de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $\left[0\,;12\right]$.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[38\,;50\right]$.

Exercice 2921

Pour chaque question, montrer que la fonction f admet T pour période :

a. $f(x) = \sin\left(6x{-}3\right) \quad ; \quad T = \dfrac{\pi}{3}$

b. $f(x) = \tan\left(2x{+}\dfrac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad T = \pi$

c. $f(x) = \left(\cos x\right)^2 - \left(\sin x\right)^2 \quad ; \quad T = \pi$

d. $f(x) = \left|\cos\left(2x{+}\dfrac{\pi}{3}\right)\right| \quad ; \quad T = \dfrac{\pi}{2}$

4. Dérivée :

Exercice 5277

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f : x \longmapsto x^2 + \cos x$ b. $g : x \longmapsto \sin(2x)$

c. $h : x \longmapsto \cos x\cdot\sin x$ d. $j : x \longmapsto \left(\sin x\right)^2$

Exercice 2878

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2\cdot\cos x$ b. $g(x) = \left(3x^2-2\right)\cdot\left(\sin x\right)^2$

c. $h(x) = \dfrac{3}{2\cdot\cos x}$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{3x+\sin x}$

5. Nombres dérivés et limites :

Exercice 3532

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \left(\cos x\right)^2$ b. $g(x) = \sin x + \cos x$

c. $h(x) = \tan(x^2+x)$ d. $j(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\left(\cos x\right)^2 - 1}{x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x + \cos x}{x + \dfrac{\pi}{4}}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\tan(x^2+x)}{x}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot \sin x}$

Exercice 3568

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\sin x$

1. Donner le nombre dérivée de la fonction g en 0.
2. En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{\sin x}{x}$

6. Etude de fonctions :

Exercice 6822

Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fasse, en justifiant la réponse.

Affirmation

L'équation $x-\cos x=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 3582

On considère les deux suites de nombres réels, $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \sin\frac{1}{n^2} + \sin\frac{2}{n^2} + \cdots + \sin\frac{n}{n^2}$$
$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$$

1. Démontrer que la suite v converge vers $\dfrac{1}{2}$.

2. a. Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :

$$x \longmapsto x - \sin x \quad ; \quad x \longmapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$
$$x \longmapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

b. Justifier que pour tout $n\geqslant 1$: $1^3+2^3+\cdots+n^3 \leqslant n^4$.

Déduire du a. l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6}\times\frac{1}{n^2} \leqslant u_n \leqslant v_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

c. Démontrer que la suite u est convergente ; quelle est sa limite?

7. Primitive et intégrale :

Exercice 3932

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ b. $g(x) = e^{x+1} + 1$

c. $h(x) = 2\cdot x\cdot e^{x^2+1}$ d. $j(x) = \cos x$

e. $k(x) = \sin(3x)$ f. $\ell(x) = \left(\sin x\right)^2$

Exercice 5232

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\pi} \left(\cos x\right)^2 dx \quad ; \quad J = \int_0^{\pi} \left(\sin x\right)^2 dx$$

1. Calculer : $I+J$; $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 5282

On considère la suite $\left(x_n\right)$ définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n\cdot \cos t\, dt$$

1. a. Montrer que la suite $\left(x_n\right)$ est à termes positifs.

b. Etudier les variations de la suite $\left(x_n\right)$.

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite $\left(x_n\right)$?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite $\left(x_n\right)$.

Exercice 6820

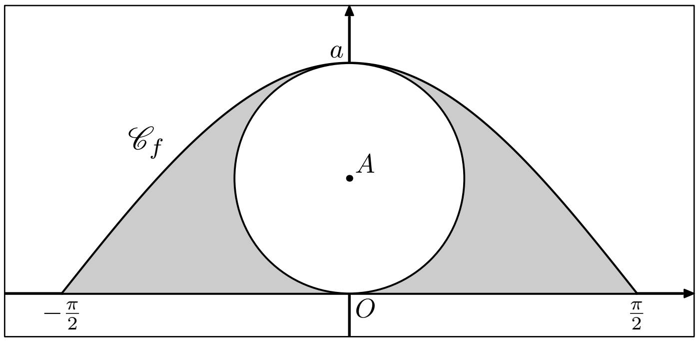
Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=a\cdot\cos x$ avec $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieurs à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2\cdot a$ d'unité d'aire.

2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte?

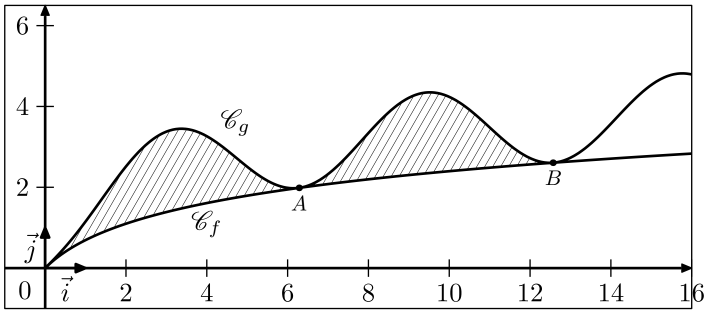


Exercice 6821

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par :

$$f(x)=\ln(x+1) \quad ; \quad g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x)$$

Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

8. Nombres complexes :

Exercice 5280

Soit les nombres complexes :

$$z_1=\sqrt{2}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{6} \quad ; \quad z_2=2+2\cdot\mathrm{i} \quad ; \quad Z=\frac{z_1}{z_2}$$

1. Ecrire Z sous forme algébrique.
2. Donner les modules et les arguments de z_1, z_2 et Z.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5281

On considère l'équation (E) suivante : $z^2+2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cdot z+1=0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

"*L'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1.*"

9. Annales :

Exercice 5283

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos(4x)$$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exericce.

On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:

$$-\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

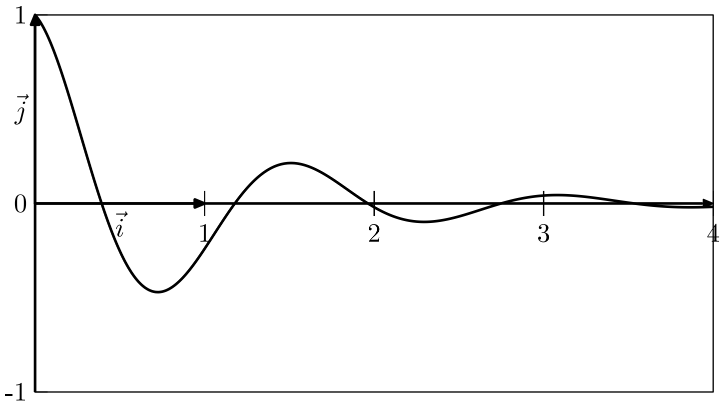
a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$:
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x) + 4\cdot\sin(4x)\right]$$

b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

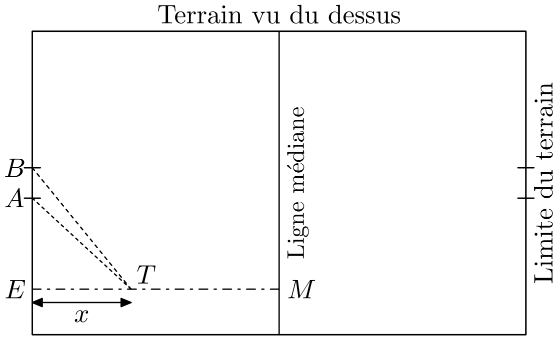
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en y traçant $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}$.



Exercice 6823

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E *(voir figure ci-contre)* situé à l'extérieur du segment $[AB]$.
La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droite de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E.
La transformation est réussi si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.

Terrain vu du dessus



Pour maximimser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.
Dans toute la suite, on note x la longueur ET, qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :
$$EM = 50\,m \quad ; \quad EA = 25\,m \quad ; \quad AB = 5{,}6\,m$$
On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

1. En utilisant les triangles rectangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan\alpha$ et $\tan\beta$ en fonction de x.

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

2. Montrer que la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

On admet que pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$:
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$
Montrer que : $\tan\gamma = \frac{5{,}6\cdot x}{x^2+765}$

4. L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle $\left]0\,;50\right[$ de la fonction f définie par :
$$f(x) = \frac{5{,}6\cdot x}{x^2 + 765}$$
Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 radian près.