

# Terminale S / Fonctions trigonométriques

## 1. Rappels :

### Exercice 5269

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de  $\cos x$  ou de  $\sin x$  les nombres suivants :

- a.  $\sin(3\pi+x)$       b.  $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$   
 c.  $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$       d.  $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$   
 e.  $\sin(\pi-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$   
 f.  $3 \cdot \sin(\pi+x) - 2 \cdot \sin(\pi-x) + 4 \cdot \sin(x-\pi)$

### Exercice 5267

Simplifier l'argument de chacune des expressions suivantes :

- a.  $\tan(x+\pi)$       b.  $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$       c.  $\cos(x-\pi)$   
 d.  $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$       e.  $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$       f.  $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

### Exercice 5273

1. En remarquant que :  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$   
 Déterminer les valeurs de  $\cos\frac{\pi}{12}$  et  $\sin\frac{\pi}{12}$ .  
 2. Déterminer les valeurs de :  $\cos\frac{7\pi}{12}$  ;  $\sin\frac{7\pi}{12}$

### Exercice 5274

Montrer la relation suivante :

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin b$$

### Exercice 5272

1. Dans chacune des cas, tracer un cercle trigonométrique et représenter chacun des ensembles suivants :

- a.  $\left\{ \cos x \mid x \in \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$   
 b.  $\left\{ \sin x \mid x \in \left[ \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \right\}$

2. A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner sans justification l'ensemble des solutions des inéquations suivantes dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  :

- a.  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$       b.  $\cos x \geq -\frac{1}{2}$       c.  $\cos x < 0$

### Exercice 3345

Résoudre, dans  $]-\pi; \pi]$ , les deux équations suivantes :

- a.  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$       b.  $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$   
 c.  $\cos(2x) = \cos \frac{\pi}{4}$       d.  $\cos x = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

### Exercice 5276

1. Simplifier l'expression suivante :  
 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$   
 2. Etablir l'égalité suivante :  
 $\frac{\sin 5x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{(\sin 3x)^2}{\sin(2x) \cdot \sin(x)}$   
 3. Résoudre, dans l'intervalle  $]-\pi; \pi]$  l'équation suivante :  
 $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) = \cos \frac{\pi}{7}$

## 2. Propriétés des fonctions sinus et cosinus :

### Exercice 2556

1. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

2. En choisissant un encadrement adéquat, montrer que la

suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ; préciser sa limite :

$$u_n = \frac{2n^2 + \cos n}{3n^2 + 5}$$

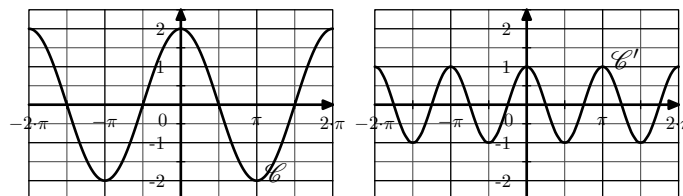
### Exercice 3302

On considère les deux fonctions suivantes  $f$  et  $g$  définies sur

$\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2 \cdot \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \cos(2 \cdot x)$$

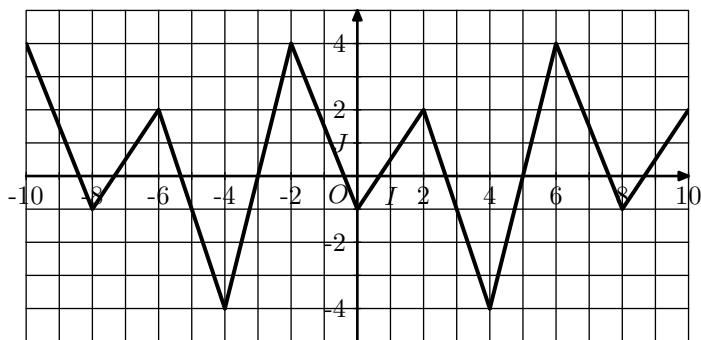
Associer à chacune de ces fonctions sa courbe représentative représentée ci-dessous :



### 3. Périodicité et parité :

#### Exercice 2920

Dans le repère  $(O;I;J)$  orthonormé, on représente ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  :



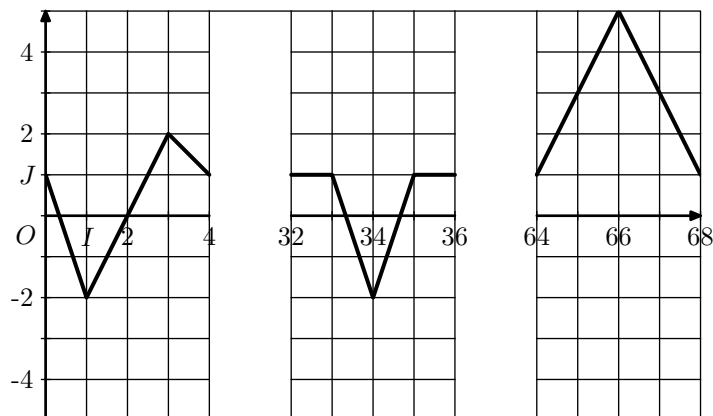
La fonction  $f$  est périodique de période  $T$ .

- Déterminer, parmi les coordonnées ci-dessous, celle(s) d'un vecteur par lequel la courbe  $\mathcal{C}_f$  est invariante :
  - Déterminer la valeur de  $T$ .
- Donner l'image, par la fonction  $f$ , des nombres suivants :
  - 14
  - 16
  - 56
  - 58

#### Exercice 2922

On considère la fonction  $f$  périodique de période 12. Ci-dessous est donnée quelques parties de la courbe  $\mathcal{C}$  représen-

tive de la fonction  $f$  :



- Reconstruire le tracé de  $\mathcal{C}_f$  sur l'intervalle  $[0; 12]$ .
- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[38; 50]$ .

#### Exercice 2921

Pour chaque question, montrer que la fonction  $f$  admet  $T$  pour période :

- $f(x) = \sin(6x-3) \quad ; \quad T = \frac{\pi}{3}$
- $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad ; \quad T = \pi$
- $f(x) = (\cos x)^2 - (\sin x)^2 \quad ; \quad T = \pi$
- $f(x) = \left| \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \right| \quad ; \quad T = \frac{\pi}{2}$

### 4. Dérivée :

#### Exercice 5277

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

- $f: x \mapsto x^2 + \cos x$
- $g: x \mapsto \sin(2x)$
- $h: x \mapsto \cos x \cdot \sin x$
- $j: x \mapsto (\sin x)^2$

#### Exercice 2878

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions suivantes :

- $f(x) = x^2 \cdot \cos x$
- $g(x) = (3x^2 - 2) \cdot (\sin x)^2$
- $h(x) = \frac{3}{2 \cdot \cos x}$
- $j(x) = \frac{\cos x}{3x + \sin x}$

### 5. Nombres dérivés et limites :

**Exercice 3532**

1. Déterminer l'expression des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- a.  $f(x) = (\cos x)^2$       b.  $g(x) = \sin x + \cos x$   
 c.  $h(x) = \tan(x^2+x)$       d.  $j(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$

2. Déterminer les limites suivantes :

**6. Etude de fonctions :****Exercice 6822**

Préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fautive, en justifiant la réponse.

**Affirmation**

L'équation  $x - \cos x = 0$  admet une unique solution dans l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Exercice 3582**

On considère les deux suites de nombres réels,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies par :

$$u_n = \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \dots + \sin \frac{n}{n^2}$$

$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

1. Démontrer que la suite  $v$  converge vers  $\frac{1}{2}$ .

**7. Primitive et intégrale :****Exercice 3932**

Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

a.  $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$       b.  $g(x) = e^{x+1} + 1$

c.  $h(x) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+1}$       d.  $j(x) = \cos x$

e.  $k(x) = \sin(3x)$       f.  $\ell(x) = (\sin x)^2$

**Exercice 5232**

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx \quad ; \quad J = \int_0^\pi (\sin x)^2 dx$$

1. Calculer :  $I+J$  ;  $I-J$ .

2. En déduire les valeurs de  $I$  et de  $J$ .

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^2 - 1}{x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{\pi}{4}}$

c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2+x)}{x}$

d.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin x}$

**Exercice 3568**

Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \sin x$

1. Donner le nombre dérivée de la fonction  $g$  en 0.

2. En déduire la valeur de la limite :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. a. Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de la variable réelle :

$$x \mapsto x - \sin x \quad ; \quad x \mapsto -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

$$x \mapsto -x + \frac{x^3}{6} + \sin x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

b. Justifier que pour tout  $n \geq 1$  :  $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4$ .

Déduire du a. l'inégalité :

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c. Démontrer que la suite  $u$  est convergente ; quelle est sa limite ?

**Exercice 5282**

On considère la suite  $(x_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cdot \cos t dt$$

1. a. Montrer que la suite  $(x_n)$  est à termes positifs.

b. Etudier les variations de la suite  $(x_n)$ .

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite  $(x_n)$  ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :

$$x_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$ .

**Exercice 6820**

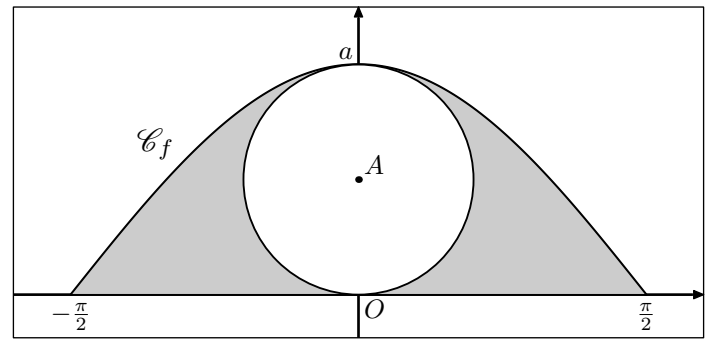
Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.

La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$  d'équation  $y = a \cdot \cos x$  avec  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $a$  un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point  $A$  de coordonnées  $\left(0; \frac{a}{2}\right)$  et de rayon  $\frac{a}{2}$ . On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe  $\mathcal{C}$  pour des valeurs de  $a$  inférieurs à 1,4.

- Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation  $x = -\frac{\pi}{2}$  et  $x = \frac{\pi}{2}$ , et la courbe  $\mathcal{C}$  est égale à  $2 \cdot a$  d'unité d'aire.
- Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel  $a$  pour respecter cette contrainte?



### Exercice 6821

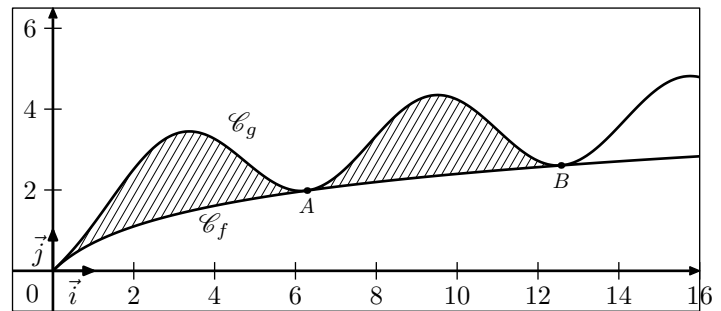


On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0; 16]$  par :

$$f(x) = \ln(x+1) \quad ; \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$$

Dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$ .

Ces courbes sont données ci-dessous :



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.

## 8. Nombres complexes :

### Exercice 5280



Soit les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{6} \quad ; \quad z_2 = 2 + 2 \cdot i \quad ; \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

- Ecrire  $Z$  sous forme algébrique.
- Donner les modules et les arguments de  $z_1$ ,  $z_2$  et  $Z$ .
- En déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

## 9. Annales :

### Exercice 5283



Le plan est rapporté à un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Soit

la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot \cos(4x)$$

et  $\Gamma$  sa courbe représentative tracée dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  en fin d'exercice. Ce graphique sera complété au fur et à mesure de l'exercice.

### Exercice 5281



On considère l'équation  $(E)$  suivante:  $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot z + 1 = 0$

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre affirmation :

“L'équation  $(E)$  a deux solutions complexes de modules égaux à 1.”

On considère également la fonction  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par  $g(x) = e^{-x}$  et on nomme  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; +\infty[$ :  $-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$
  - En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$ .

3. On définit la suite  $(u_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ .

a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et étudier sa convergence.

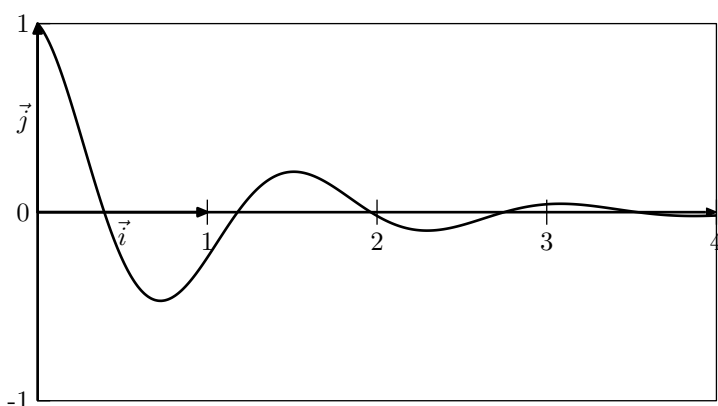
4. a. Montrer que, pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  :

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot [\cos(4x) + 4 \cdot \sin(4x)]$$

b. En déduire que les courbes  $\Gamma$  et  $\mathcal{C}$  ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à  $10^{-1}$  près par excès du coefficient directeur de la droite  $\mathcal{T}$  tangente à la courbe  $\Gamma$  au point d'abscisse  $\frac{\pi}{2}$ .

Compléter le graphique donné en y traçant  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{C}$ .



**Exercice 6823**

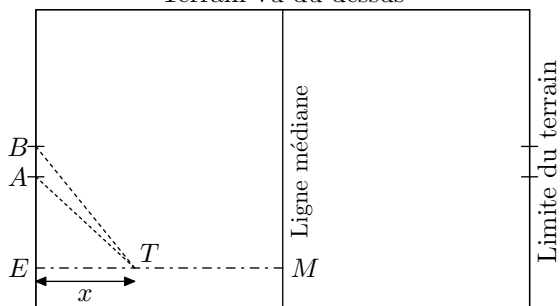


Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point  $E$  (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment  $[AB]$ .

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point  $T$  que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment  $[EM]$  perpendiculaire à la droite  $(AB)$  sauf en  $E$ .

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points  $A$  et  $B$  sur la figure.

Terrain vu du dessus



Pour maximiser ses chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point  $T$  qui rend l'angle  $\widehat{ATB}$  le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point  $T$  sur le segment  $[EM]$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans toute la suite, on note  $x$  la longueur  $ET$ , qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes :

$$EM = 50 \text{ m} ; EA = 25 \text{ m} ; AB = 5,6 \text{ m}$$

On note  $\alpha$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETA}$ ,  $\beta$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ETB}$  et  $\gamma$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{ATB}$ .

1. En utilisant les triangles rectangles  $ETA$  et  $ETB$  ainsi que les longueurs fournies, exprimer  $\tan \alpha$  et  $\tan \beta$  en fonction de  $x$ .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$

$$\text{par : } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

2. Montrer que la fonction  $\tan$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ .

3. L'angle  $\widehat{ATB}$  admet une mesure  $\gamma$  appartenant à l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , résultat admis ici que l'on peut observer sur la figure.

On admet que pour tous réels  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $]0; \frac{\pi}{2}[$  :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \times \tan b}$$

$$\text{Montrer que : } \tan \gamma = \frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 765}$$

4. L'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum lorsque sa mesure  $\gamma$  est maximale. Montrer que cela correspond à un maximum sur l'intervalle  $]0; 50[$  de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{5,6 \cdot x}{x^2 + 765}$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de  $x$  pour laquelle l'angle  $\widehat{ATB}$  est maximum et déterminer cette valeur de  $x$  au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle  $\widehat{ATB}$  à 0,01 radian près.