Terminale S/Fonctions numériques

1. Rappels : généralités :

Exercice 3307

Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est* 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-3 ↘	-5 ↗	4 ↘	-4,5

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$:
   a. admet une seule solution
   b. admet deux solutions
   c. admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, la fonction f :
   a. admet pour minimum la valeur -5 ;
   b. admet pour maximium la valeur 4 ;
   c. admet deux maximums.

3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   a. $y=4$ b. $y=4(x-2)$ c. $x=4$

Exercice 3311

On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $]-2\,;+\infty[$.
La fonction f admet le tableau de varition ci-dessous :

x	$-\infty$		-2		1		α		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "*vraie*" ou si elle est "*fausse*" ou si "*on ne peut pas conclure*". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :
- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
2. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-5\,;-2[$.
3. Si $-2<x<1$ et $x<x'$ alors $f(x)<f(x')$.
4. $f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-\infty\,;-2[$.

2. Rappels : polynômes du second degré :

Exercice 3343

Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :
$\{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "*rapidement*" la factorisation de chacun des polynômes suivants :

a. x^2+2x-8 b. $2x^2-4x-6$
c. x^2+x-6 d. $3x^2-4x+1$
e. x^3+x^2-2x f. $5x^2+3x-2$

BY-NC

Exercice 3344

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes du second degré suivant :

a. $x^2 - 5x + 1$ b. $-3x^2 + x - 1$

c. $2(x+1)(2x-1)$ d. $(2-x)(4+x)$

Exercice 3860

Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2 + 4x + 1 = 0$ b. $3x^2 - 4x + 2 = 0$

c. $-x^2 + 2x + 3 = 0$ d. $2x^2 - 4x + 2 = 0$

e. $-3x^2 + 3x + 3 = 0$ f. $-x^2 + 4x + 3 = 0$

Exercice 4986

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2 + 4x + 1$ b. $-3x^2 + 4x - 1$ c. $-4x^2 + 5x$

d. $x^2 + 2x - 1$ e. $-x^2 + 4x + 1$ f. $3x^2 - 4x + 2$

3. Rappels : dérivées :

Exercice 3304

On considère la fonction f dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

1. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire le tableau de variations de la fonction f *(on complétera le tableau de variations à l'aide de valeurs approchées).*

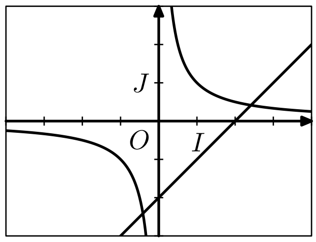
3. A l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Exercice 3310

Soit l'équation (E) : $\dfrac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

   Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\,;+\infty[$



2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $g(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x}$

   a. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$.
   Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   b. Déterminer les images, par la fonction g, des nombres 1 et 4.
   Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).

3. Un troisième élève dit : "Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement". Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

4. Introduction aux limites de fonctions :

Exercice 4989

On considère la fonction f définie par :
$f : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10	100	1000
$f(x)$				

   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" grandit énormément?

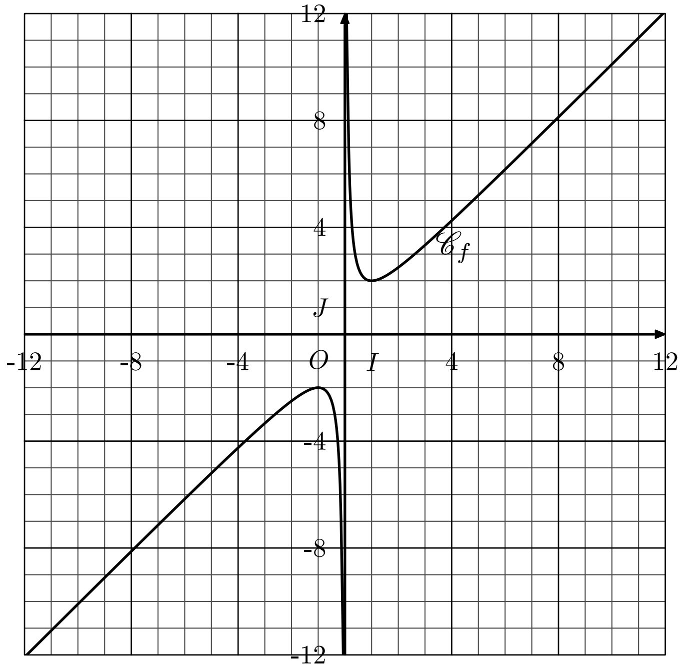
3. a. Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

   b. Que peut-on dire de la valeur de "$f(x)$" lorsque "x" reste positif mais en devenant de plus en plus petit?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :

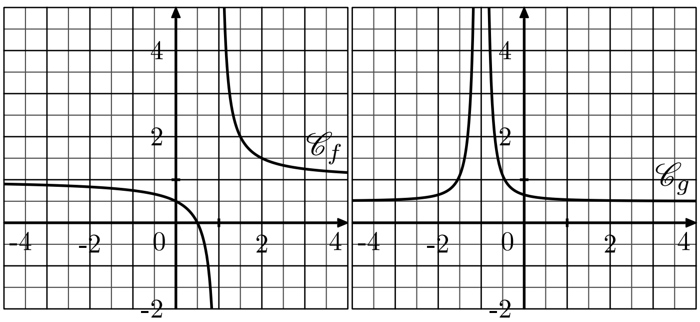
 BY-NC



4. Interpréter graphiquement les résultats de la question 3..

Exercice 5002

On munit le plan d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



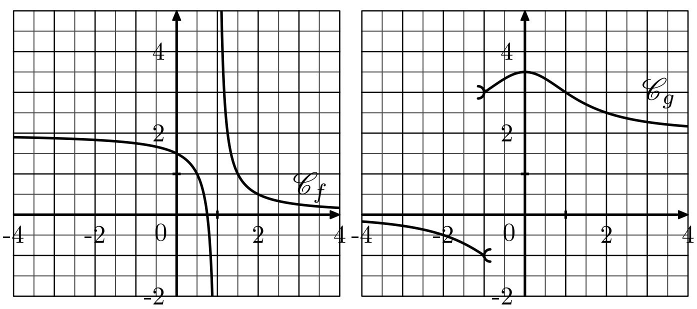
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} g(x)$

Exercice 647

On munit le plan d'un repère $(O;I;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} f(x)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ f. $\lim\limits_{x\mapsto -1^-} g(x)$

Exercice 4990

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto \frac{x+2}{x-4}$$

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

2. Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-4}$$

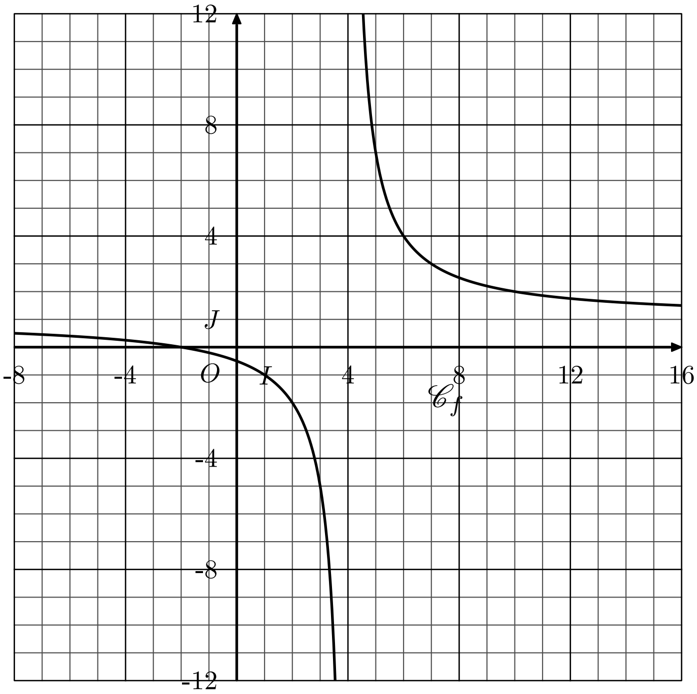
3. A l'aide de l'expression obtenue à la précédente question :

   a. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment?

   b. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4;5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

   c. Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3;4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

Ci-dessous, est donnée la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère $(O;I;J)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats précédement obtenus.

Exercice 6751

Graphiquement et à l'aide de la calculatrice, déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x-1}{3-x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \frac{-2\cdot x^2-2\cdot x+4}{2\cdot x+4}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} (x^2+x)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x}}$

 (cc) BY-NC

5. Limites sans formes indéterminées :

Exercice 5704

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

6. Limites avec formes indéterminées :

Exercice 3336

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{x^2+2{\cdot}x-1}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2+2{\cdot}x}{x^3-x^2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \sqrt{x^2-x-2}\cdot(x-2)$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{x^2+x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3-2x^2+1$

f. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^3-2x^2+1$

Exercice 4993

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$

b. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -3{\cdot}x^3+\dfrac{2}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3$

d. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2$

e. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^2+3{\cdot}x$

f. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3-2{\cdot}x^2$

7. Limites de fractions rationnelles en l'infini :

Exercice 4992

1. On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$

a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x{\cdot}\Big(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\Big)}$$

b. En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x\longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x)=2$

8. Limites de fractions rationnelles en 0 :

Exercice 5013

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2{\cdot}x^3-x}{x^3+2{\cdot}x^2}$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x)=\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{2{\cdot}x^2-1}{x{\cdot}(x+2)}$$

2. Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\mapsto 0^+} f(x)$$

Exercice 4994

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{1}{x}$

b. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{1}{x}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{3}{x^2}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^3+2{\cdot}x}{x^2+x}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

f. $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

9. Limites de fractions rationnelles avec factorisation :

BY-NC

Exercice 635

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} \dfrac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} \dfrac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 1^-} \dfrac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -2^+} \dfrac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

10. Limites de fractions rationnelles avec tableau de signes :

Exercice 5014

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x)=\frac{x^2+3\cdot x}{2\cdot x^2-10\cdot x+12}$$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x)=\frac{1+\dfrac{3}{x}}{2-\dfrac{10}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\frac{x\cdot(x+3)}{(x-2)(2\cdot x-6)}$$

2. Dresser le tableau de signe de l'expression $(x-2)(2x-6)$.
3. En déduire la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$ b. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$ e. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} f(x)$

f. $\lim\limits_{x\mapsto 2^+} f(x)$ c. $\lim\limits_{x\mapsto 3^-} f(x)$ d. $\lim\limits_{x\mapsto 3^+} f(x)$

11. Limites de fractions rationnelles :

Exercice 6801

On considère le polynôme $P=3\cdot x^2-x-2$.

1. Factoriser le polynôme P en laissant une trace de votre démarche.
2. Déterminer la valeur des deux limites suivnates :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{2\cdot x-3}{3\cdot x^2-x-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{2\cdot x-2}{3\cdot x^2-x-2}$

12. Autres limites :

Exercice 4991

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=-2$$

Exercice 2960

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x\sqrt{x}-x$ b. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2+x-2}$

c. $\lim\limits_{x\mapsto 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} \dfrac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

Exercice 3338

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

13. Autres limites : avec valeur absolue :

Exercice 6757

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Etablir l'identité suivante : $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$
3. En déduire les deux limites suivantes :

$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x)$

 BY-NC

Exercice 5003

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f : x \longmapsto \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. a. Pour $x \in [-1\,;0[$, établir l'égalité : $f(x) = -\sqrt{x+1}$

   b. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x \mapsto 0^-} f(x)$.
3. Déterminer la valeur de la limite $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} f(x)$.
4. Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

Exercice 5011

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{2{\cdot}x^3+x-2}{-x^2-2}$ b. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \dfrac{3{\cdot}x^3-2{\cdot}x^2}{x^4+x^3}$

c. $\lim\limits_{x \mapsto 3^+} \dfrac{x-6}{2x^2-15x+27}$ d. $\lim\limits_{x \mapsto -1^+} \dfrac{2x^2+5x+3}{-x^2+x+2}$

e. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}$ f. $\lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{4{\cdot}x^2-3x+1}}$

14. Limite de suites :

Exercice 2555

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{n+1}$ b. $u_n = \dfrac{n-3}{n^2+1}$

c. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}$ d. $u_n = 1+n-2n^2+3n^3$

Exercice 6176

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n^2+2$ b. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2+\dfrac{1}{n}$

c. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n^3+n+2$ d. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n-\dfrac{1}{n}$

e. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} n{\cdot}(n-10)$ f. $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{n+1}$

15. Asympotes :

Exercice 5714

En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ b. $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

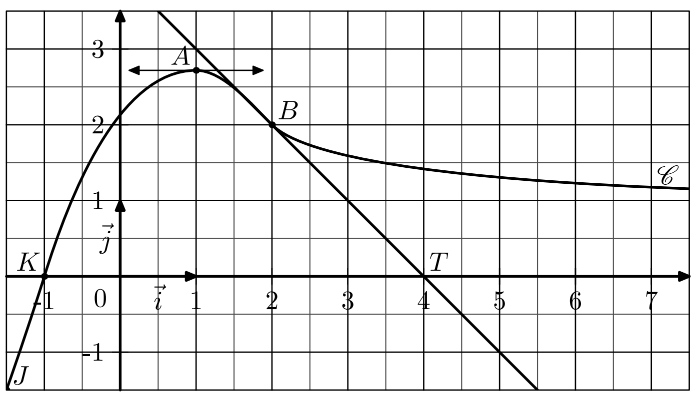
c. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$ d. $j(x) = \dfrac{(x^2+1)\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$

16. Etudes de fonctions :

Exercice 3303

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

- Les points $J\left(-\dfrac{3}{2}\,;-\dfrac{3}{2}\right)$, $K(-1\,;0)$, $A\left(1\,;\dfrac{11}{4}\right)$, $B(2\,;2)$ sont des points de $\mathscr{C}$;
- La tangente à $\mathscr{C}$ en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en B passe par $T(4\,;0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2}\,;1\right]$ et strictement décroissante sur $[1\,;+\infty[$.



1. Donner les valeurs de $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, en justifiant vos résponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$

 BY-NC

Exercice 5004

On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x \longmapsto \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Quelles asymptotes admet la fonction f?

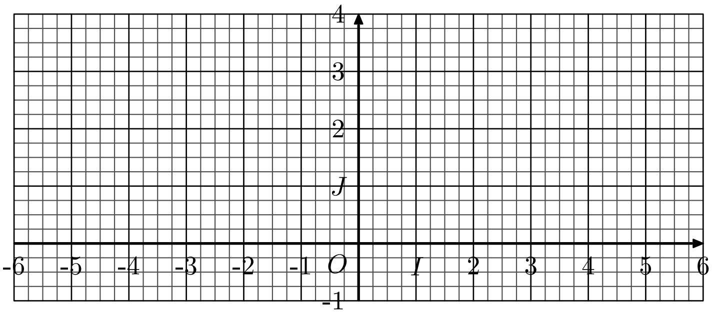
3. a. Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :

$$f'(x) = \frac{-6x^2+12x+18}{\left(x^2-2x+5\right)^2}$$

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

5. Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :

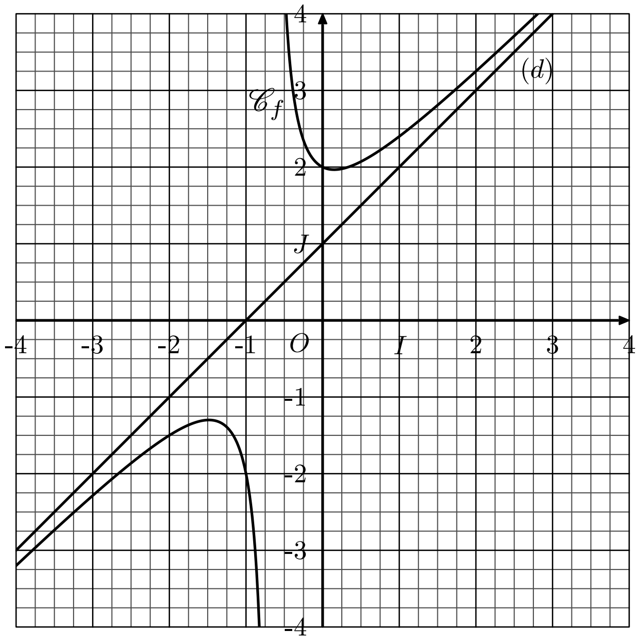


Exercice 6802

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x+4}{3{\cdot}x+2}$$

On notera $\mathscr{C}_f$ la représentation de la fonction f dans le repère $\big(O\,;\,I\,;\,J\big)$ ci-dessous :



La droite (d) est la représentation de la fonction g définie par :

$$g(x) = x+1$$

1. a. Donner, sans justification, les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

   b. Préciser si la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet des asymptotes.

2. a. Déterminer les réels a, b et c réalisant l'égalité :

$$f(x) = a{\cdot}x+b+\frac{c}{3{\cdot}x+2}$$

   b. En déduire que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \frac{9{\cdot}x^2+12{\cdot}x-2}{\left(3{\cdot}x+2\right)^2}$$

   c. Dresser, en justifiant votre démarche, le tableau de variations de la fonction f.
   On n'indiquera la valeur des extrémums de f

3. Pour tout entier naturel n, on considère :
   - M_n le point de (d) d'abscisse n,
   - N_n le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse n,
   - S_n le segment $[M_nN_n]$.

   a. Représenter sur le graphique les segments S_0, S_1 et S_2.

   b. Donner la mesure exacte du segment S_0.

   c. Que peut-on dire de la longueur du segment $[M_nN_n]$ lorsque la valeur de n tend vers $+\infty$.

Exercice 3341

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. a. Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.

   b. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des asymptotes? si oui, préciser.

2. On note (d) la droite d'équation $y=1$. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de (d).

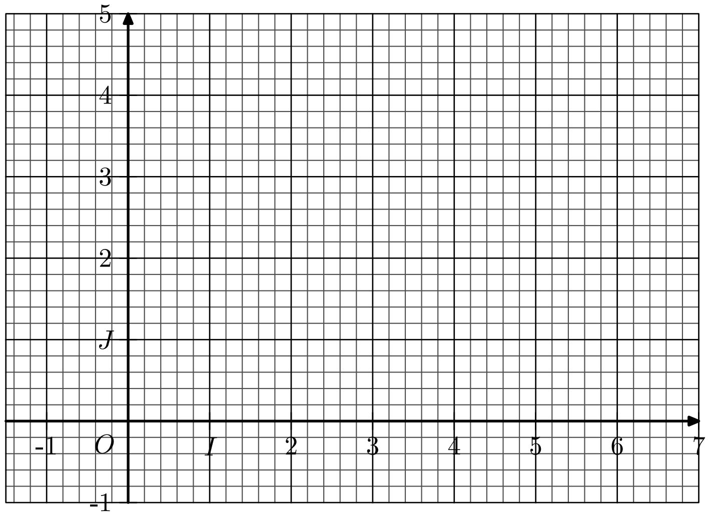
3. a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2h}{2{\cdot}(h+2){\cdot}\left[2\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}{\cdot}(h+2)\right]}$$

   b. En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.

4. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$.

 (cc) BY-NC



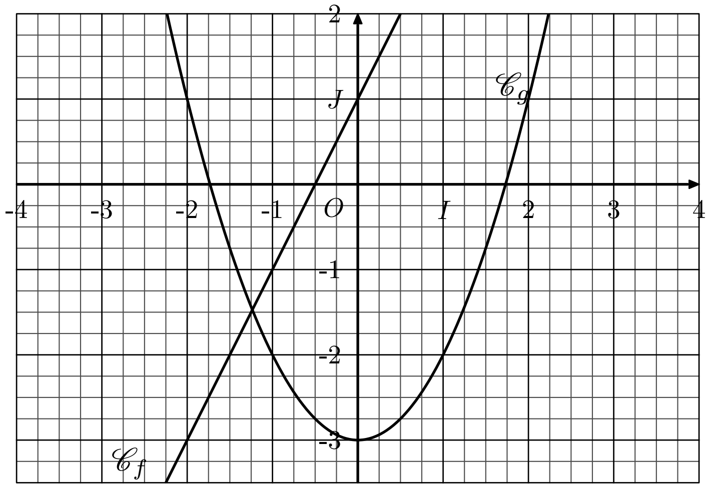
17. Limites de composées de fonctions :

Exercice 5008

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4\,;4]$ par les relations :

$f(x) = 2x+1 \quad ; \quad g(x) = x^2-3$

On donne les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O\,;I\,;J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ;
  on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ;
  on note ce nombre $g\big(f(x)\big)$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaine :

$x \xrightarrow{\ f\ } f(x) \xrightarrow{\ g\ } g\big[f(x)\big]$

a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$g\big[f(-1)\big] \quad ; \quad g\Big[f\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big]$

b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g\big(f(x)\big)$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g\big[f(x)\big]$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

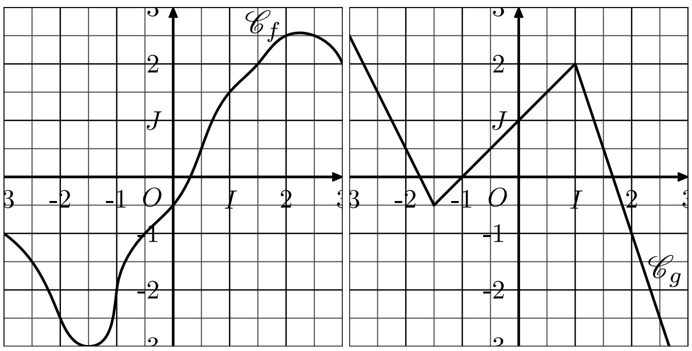
3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_{g\circ f}$ représentative de la fonction $g\circ f$.

4. Donner l'expression, en fonction de x, de la fonction $g\circ f$.

Exercice 5009

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3\,;3]$ dont les courbes, respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, représentatives sont données dans un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormée :

 BY-NC



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

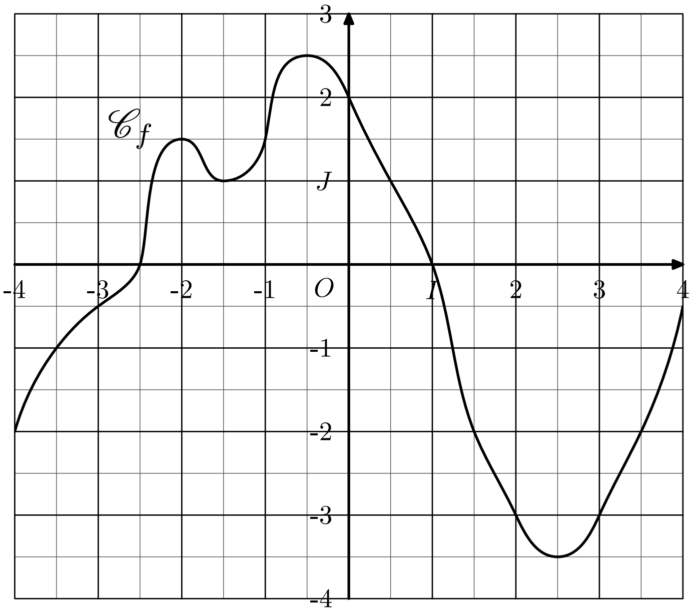
a. $(f\circ g)(-2)$ b. $(f\circ g)(1{,}5)$ c. $(f\circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

a. $(g\circ f)(-3)$ b. $(g\circ f)(0)$ c. $(g\circ f)(1)$

Exercice 5010

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[-4\,;4\right]$ dont la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

a. $(f\circ f)(1)$ b. $(f\circ f)(-2)$ c. $(f\circ f)(3)$

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 3309

Pour chaque question, déterminer une expression "*simplifiée*" de l'expression de la composée $f\circ g$ de la fonction g par la fonction f :

a. $f(x)=2x^2-x+1$; $g(x)=3x-2$

b. $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=4x^2+12x+11$

c. $f(x)=\dfrac{1}{x}$; $g(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

d. $f(x)=x^2-x+1$; $g(x)=\sqrt{x}$

e. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Exercice 3355

Pour chaque question, déterminer la limite de $g\circ f$ en a :

a. $f(x)=2x^2-5x-3$; $g(x)=\dfrac{5-x}{x^2}$; $a=3$

b. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$; $g(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$; $a=-3$

c. $f(x)=\dfrac{\cos x-2}{x}$; $g(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^3+x^2}$; $a=+\infty$

Exercice 5023

Soit f une fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ vérifiant :

$f(0)=0$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=+\infty$

On considère la fonction g définie sur $\left]0\,;+\infty\right[$ par la relation :

$g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0.

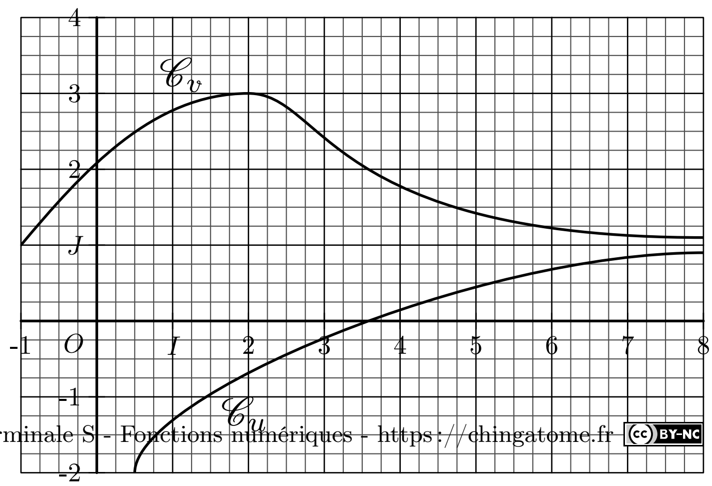
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

3. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g. Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe $\mathscr{C}$?

18. Limites et comparaisons :

Exercice 3349

On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont données dans le repère ci-dessous :



BY-NC

1. Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$

2. Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :

   $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} u(x) = 1 \quad ; \quad \lim\limits_{x \mapsto +\infty} v(x) = 1$

   Faire une conjecture quand à la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 3351

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 2 - \cos x}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir l'encadrement suivant :

   $$\frac{5}{x^2+3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{x^2+1}$$

   b. En déduire la valeur de la limite suivante :

   $$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x)$$

Exercice 3354

Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \dfrac{x + \sin(x)}{x}$

b. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} x \cdot \dfrac{2 + \cos x}{4} + \sin x$

 BY-NC