

Terminale S / Fonctions numériques

1. Rappels : généralités :

Exercice 3307



Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 point une mauvaise réponse enlève 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5; +\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
Variation de f		-3		4	
	$-\infty$		-5		-4,5

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $]-5; +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$:

- a. admet une seule solution
- b. admet deux solutions
- c. admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $]-5; +\infty[$, la fonction f :

- a. admet pour minimum la valeur -5 ;
- b. admet pour maximum la valeur 4 ;
- c. admet deux maximums.

3. On sait que l'équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 2 est :

a. $y = 4$

b. $y = 4(x - 2)$

c. $x = 4$

Exercice 3311



On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$.

La fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	$-\infty$	-2	1	α	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$		$+\infty$	0	$+\infty$
		$-\infty$		-1	

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha) = 0$.

On appelle \mathcal{C} la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "vraie" ou si elle est "fausse" ou si "on ne peut pas conclure". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :

- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.

2. $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-5; -2[$.

3. Si $-2 < x < 1$ et $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.

4. $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]-\infty; -2[$.

2. Rappels : polynômes du second degré :

Exercice 3343



Chacun de ses polynômes admettent au moins une racine parmi l'ensemble suivant :

$$\{-2; -1; 1; 2\}$$

Utiliser ce renseignement pour effectuer "rapidement" la fac-

torisation de chacun des polynômes suivants :

a. $x^2 + 2x - 8$

b. $2x^2 - 4x - 6$

c. $x^2 + x - 6$

d. $3x^2 - 4x + 1$

e. $x^3 + x^2 - 2x$

f. $5x^2 + 3x - 2$

Exercice 3344 

Dresser le tableau de variations de chacun des polynômes du second degré suivant :

- a. $x^2 - 5x + 1$ b. $-3x^2 + x - 1$
 c. $2(x+1)(2x-1)$ d. $(2-x)(4+x)$

Exercice 3860 

Résoudre les équations suivantes :

- a. $3x^2 + 4x + 1 = 0$ b. $3x^2 - 4x + 2 = 0$
 c. $-x^2 + 2x + 3 = 0$ d. $2x^2 - 4x + 2 = 0$
 e. $-3x^2 + 3x + 3 = 0$ f. $-x^2 + 4x + 3 = 0$

Exercice 4986 

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

- a. $3x^2 + 4x + 1$ b. $-3x^2 + 4x - 1$ c. $-4x^2 + 5x$
 d. $x^2 + 2x - 1$ e. $-x^2 + 4x + 1$ f. $3x^2 - 4x + 2$

3. Rappels: dérivées :**Exercice 3304** 

On considère la fonction f dont l'image de $x \in \mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$$

- Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f .
 - Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur \mathbb{R} .
- En déduire le tableau de variations de la fonction f (on complétera le tableau de variations à l'aide de valeurs approchées).
- A l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

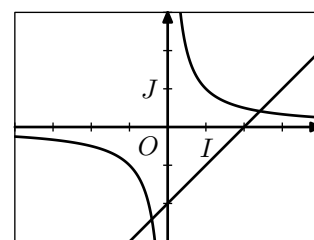
Exercice 3310   

Soit l'équation (E): $\frac{1}{x} = x - 2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0; +\infty[$.

- Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole

d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite d'équation $y = x - 2$.

Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0; +\infty[$



- Un second élève considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$$
 - On note g' la fonction dérivée de g . Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - Déterminer les images, par la fonction g , des nombres 1 et 4. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
- Un troisième élève dit : "Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement". Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

4. Introduction aux limites de fonctions :**Exercice 4989** 

On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto x + \frac{1}{x}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Par des calculs mentaux, Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

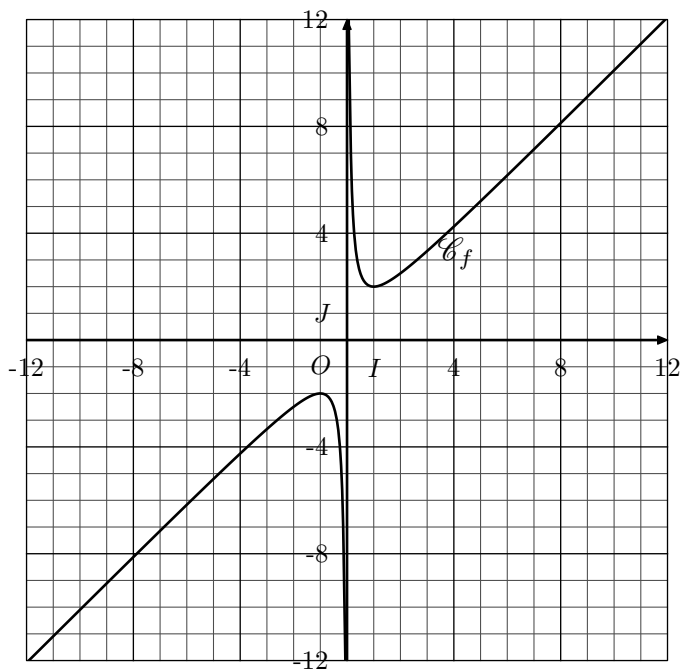
x	1	10	100	1000
$f(x)$				

 - Que peut-on dire de la valeur de " $f(x)$ " lorsque " x " grandit énormément?
- Par des calculs mentaux, compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$				

- Que peut-on dire de la valeur de " $f(x)$ " lorsque " x " reste positif mais en devenant de plus en plus petit?

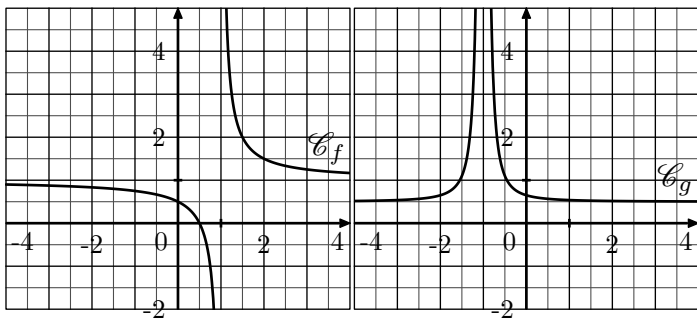
Ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormée :



4. Interpréter graphiquement les résultats de la question 3.

Exercice 5002

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g :

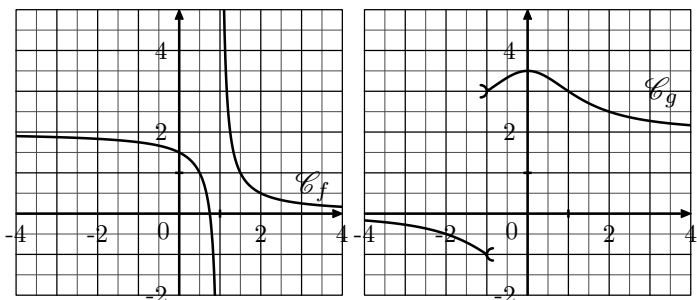


Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes:

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | c. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ |
| d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ | e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | f. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ |

Exercice 647

On munit le plan d'un repère $(O; I; J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g :



Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes:

- | | | |
|--|--|-------------------------------------|
| a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ | c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ |
| d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ | e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | f. $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$ |

Exercice 4990

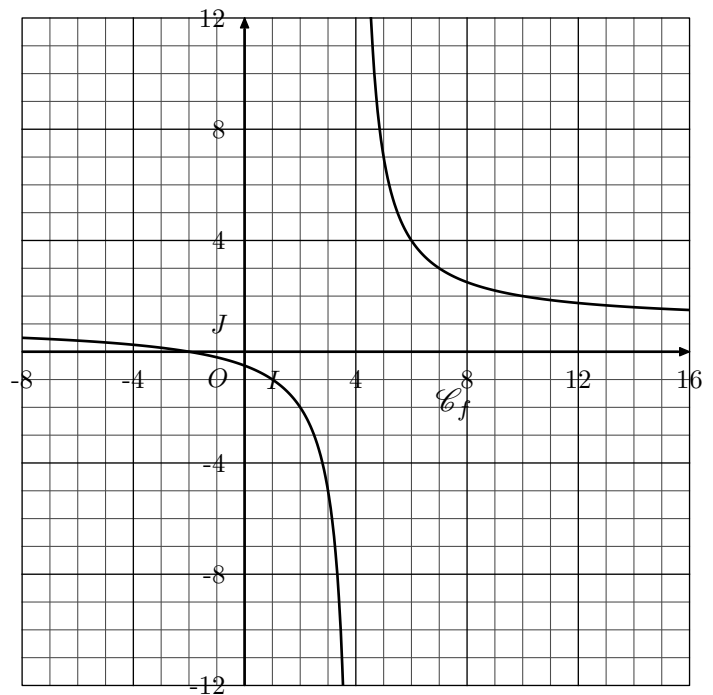
On considère la fonction f définie par:

$$f: x \mapsto \frac{x+2}{x-4}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer la valeur des réels a et b réalisant l'identité suivante pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = a + \frac{b}{x-4}$$
- A l'aide de l'expression obtenue à la précédente question:
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque la valeur de x grandit indéfiniment?
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $]4; 5]$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?
 - Que peut-on dire de la valeur de $f(x)$ lorsque x appartient à $[3; 4[$ et que sa valeur se rapproche de plus en plus près de 4?

Ci-dessous, est donnée la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ orthonormé:



4. Interpréter graphiquement les résultats précédemment obtenus.

Exercice 6751

Graphiquement et à l'aide de la calculatrice, déterminer les limites suivantes:

- | | |
|--|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{3-x}$ | b. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$ |
| c. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-2x^2 - 2x + 4}{2x + 4}$ | d. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$ |

5. Limites sans formes indéterminées :

Exercice 5704

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{5 - x}{1 - x}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + 1}{x}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{-x^3}$

6. Limites avec formes indéterminées :

Exercice 3336

Sans déterminer les limites, préciser lesquelles présentent une forme indéterminée :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{x^2 + 2 \cdot x - 1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2 \cdot x}{x^3 - x^2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2 - x - 2} \cdot (x - 2)$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 1}{x^2 + x}$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2x^2 + 1$

f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 2x^2 + 1$

Exercice 4993

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \cdot x^3 + \frac{2}{x}$

c. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x^3$

d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2 \cdot x - (x + 2)^2$

e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 3 \cdot x$

f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 2 \cdot x^2$

7. Limites de fractions rationnelles en l'infini :

Exercice 4992

1. On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \frac{3x^2 + 5x}{3x^3 + 4x + 1}$$

a. Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2 + 5x}{3x^3 + 4x + 1} = \frac{3 + \frac{5}{x}}{x \cdot \left(3 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}$$

b. En déduire la valeur de la limite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g: x \mapsto \frac{4x^3 + 2x + 1}{2x^3 - 2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$

8. Limites de fractions rationnelles en 0 :

Exercice 5013

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x) = \frac{2 \cdot x^3 - x}{x^3 + 2 \cdot x^2}$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{2 \cdot x^2 - 1}{x \cdot (x + 2)}$$

2. Déterminer la valeur des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Exercice 4994

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$ c. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 2 \cdot x}{x^2 + x}$ e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot x^2}{x^4 + x^3}$ f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \cdot x^2}{x^4 + x^3}$

9. Limites de fractions rationnelles avec factorisation :

Exercice 635

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2-x}{2x^2-x-6}$

b. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{2x^2-15x+27}$

c. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x^2+7x-4}{(x-1)^2}$

d. $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2+5x-2}{x^2+7x+10}$

10. Limites de fractions rationnelles avec tableau de signes :

Exercice 5014

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 10x + 12}$$

1. Etablir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{1 + \frac{3}{x}}{2 - \frac{10}{x} + \frac{12}{x^2}} = \frac{x \cdot (x + 3)}{(x - 2)(2x - 6)}$$

2. Dresser le tableau de signe de l'expression $(x-2)(2x-6)$.

3. En déduire la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ e. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

f. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

11. Limites de fractions rationnelles :

Exercice 6801

On considère le polynôme $P = 3x^2 - x - 2$.

1. Factoriser le polynôme P en laissant une trace de votre

démarche.

2. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-3}{3x^2-x-2}$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-2}{3x^2-x-2}$

12. Autres limites :

Exercice 4991

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}} = -2$$

Exercice 2960

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indé-

terminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} - x$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2+x-2}$

c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

Exercice 3338

Déterminer la valeur de chacune des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$ b. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$

13. Autres limites : avec valeur absolue :

Exercice 6757

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

2. Etablir l'identité suivante : $f(x) = \frac{x \cdot \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$

3. En déduire les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Exercice 5003

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f: x \mapsto \frac{\sqrt{x^3 + x^2}}{x}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Pour $x \in [-1; 0[$, établir l'égalité : $f(x) = -\sqrt{x+1}$
 - Déterminer la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- Déterminer la valeur de la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

14. Limite de suites :**Exercice 2555**

Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a. $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$	b. $u_n = \frac{n - 3}{n^2 + 1}$
c. $u_n = \frac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1}$	d. $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

15. Asymptotes :**Exercice 5714**

En traçant la courbe représentative de fonctions à l'aide de la calculatrice ou de logiciel de tracer, émettre une conjecture sur l'ensemble de définition et sur les asymptotes à la courbe

16. Etudes de fonctions :**Exercice 3303**

Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe représentative \mathcal{C} d'une fonction f dérivable sur $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

- Les points $J(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$, $K(-1; 0)$, $A(1; \frac{11}{4})$, $B(2; 2)$ sont des points de \mathcal{C} ;
- La tangente à \mathcal{C} en A est parallèle à l'axe des abscisses.
- La tangente à \mathcal{C} en B passe par $T(4; 0)$.
- La droite d'équation $y=1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.
- La fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{3}{2}; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

- Peut-on parler de la limite de la fonction f en 0.

Exercice 5011

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot x^3 + x - 2}{-x^2 - 2}$	b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2}{x^4 + x^3}$
c. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 6}{2x^2 - 15x + 27}$	d. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2 + 5x + 3}{-x^2 + x + 2}$
e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$	f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4 \cdot x^2 - 3x + 1}}$

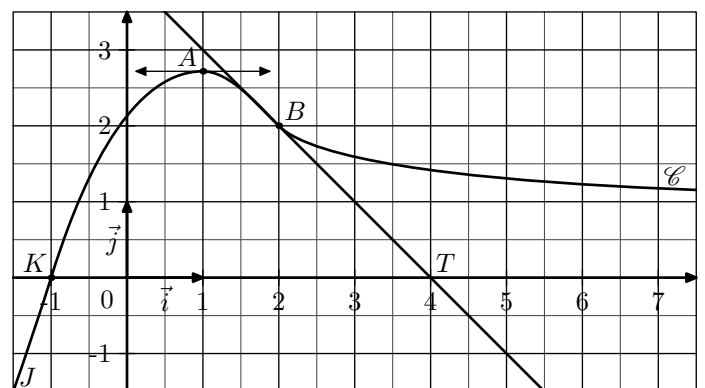
Exercice 6176

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + 2$	b. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n}$
c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 + n + 2$	d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \frac{1}{n}$
e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot (n - 10)$	f. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{n + 1}$

de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$	b. $g(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
c. $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 1}$	d. $j(x) = \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$



- Donner les valeurs de $f(-\frac{3}{2})$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ ainsi que la limite de f en $+\infty$.
- Donner, en justifiant vos réponses, les nombres $f'(1)$ et $f'(2)$

Exercice 5004

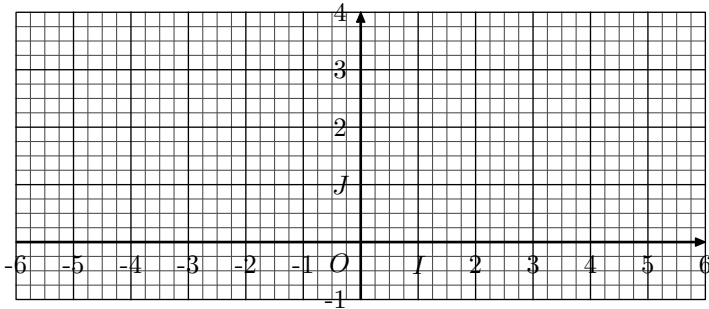


On considère la fonction f définie par :

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 4x - 1}{x^2 - 2x + 5}$$

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Quelles asymptotes admet la fonction f ?
- Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :

$$f'(x) = \frac{-6x^2 + 12x + 18}{(x^2 - 2x + 5)^2}$$
 - Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
- Tracer la droite (Δ) , les asymptotes à la courbe \mathcal{C}_f puis la courbe \mathcal{C}_f dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé ci-dessous :



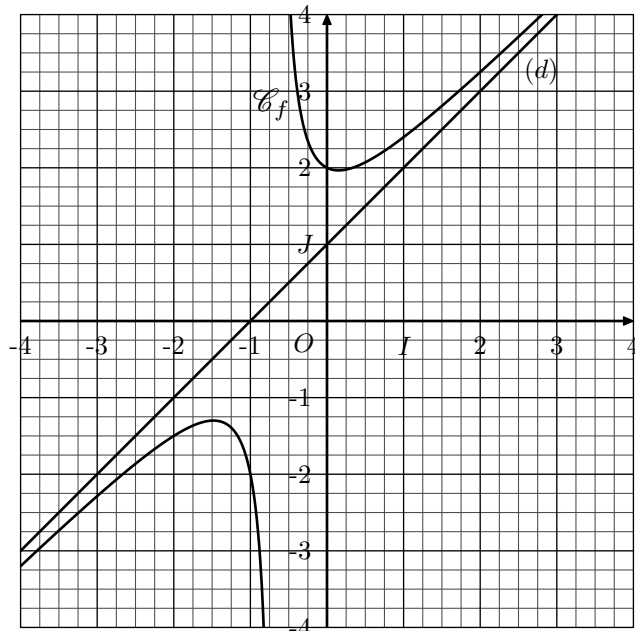
Exercice 6802



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5x + 4}{3x + 2}$$

On notera \mathcal{C}_f la représentation de la fonction f dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



La droite (d) est la représentation de la fonction g définie par :

$$g(x) = x + 1$$

- Donner, sans justification, les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
 - Préciser si la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f admet des asymptotes.
- Déterminer les réels a, b et c réalisant l'égalité :

$$f(x) = a \cdot x + b + \frac{c}{3 \cdot x + 2}$$
 - En déduire que la fonction f admet pour dérivée la fonction f' définie par :

$$f'(x) = \frac{9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 2}{(3 \cdot x + 2)^2}$$
 - Dresser, en justifiant votre démarche, le tableau de variations de la fonction f .
On n'indiquera la valeur des extrémums de f
- Pour tout entier naturel n , on considère :
 - M_n le point de (d) d'abscisse n ,
 - N_n le point de \mathcal{C}_f d'abscisse n ,
 - S_n le segment $[M_n N_n]$.
 - Représenter sur le graphique les segments S_0, S_1 et S_2 .
 - Donner la mesure exacte du segment S_0 .
 - Que peut-on dire de la longueur du segment $[M_n N_n]$ lorsque la valeur de n tend vers $+\infty$.

Exercice 3341



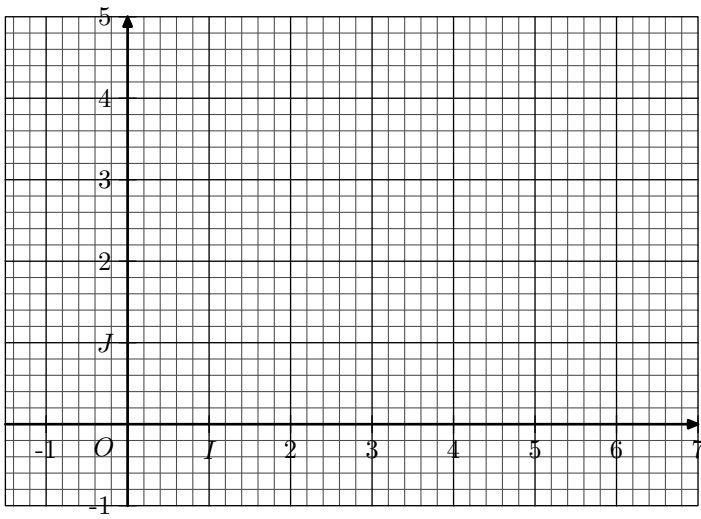
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

- Etudier les limites aux bornes de son ensemble de définition.
 - La courbe \mathcal{C}_f admet-elle des asymptotes? si oui, préciser.
- On note (d) la droite d'équation $y=1$. Déterminer la position relative de \mathcal{C}_f et de (d) .
- Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2h}{2 \cdot (h + 2) \cdot \left[2\sqrt{h^2 + 2h + 2} + \sqrt{2} \cdot (h + 2) \right]}$$
 - En déduire la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.
- Tracer dans le repère ci-dessous la courbe \mathcal{C}_f .



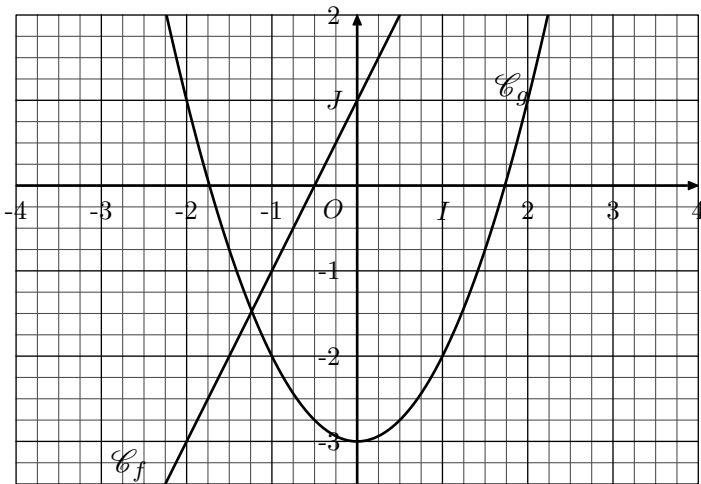
17. Limites de composées de fonctions :

Exercice 5008

On considère les deux fonctions f et g définie sur $[-4; 4]$ par les relations :

$$f(x) = 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = x^2 - 3$$

On donne les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g représentatives des fonctions f et g dans le repère $(O; I; J)$ ci-dessous :



1. Par lecture graphique, compléter les tableaux de valeurs suivants :

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$f(x)$					

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$					

2. On considère le programme de calcul suivant :

- Prendre un nombre x ;
- Déterminer l'image de x par la fonction f ;
on note ce nombre x' ;
- Déterminer l'image de x' par la fonction g ;
on note ce nombre $g(f(x))$.

On peut noter ce programme de calcul par la chaîne :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)]$$

- a. Déterminer la valeurs des expressions suivantes :

$$g[f(-1)] \quad ; \quad g\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

- b. Compléter le tableau de valeurs suivant :

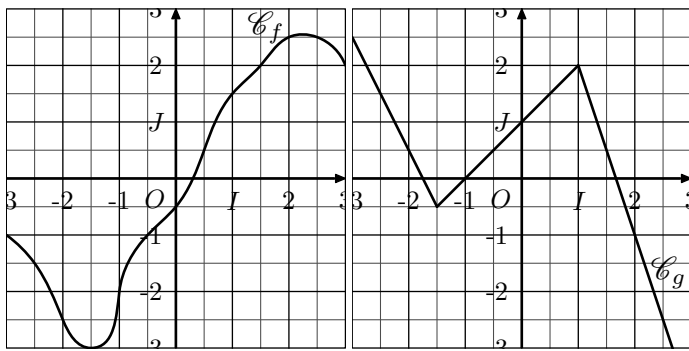
x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$g(f(x))$					

On vient de créer une nouvelle fonction qui à un nombre x associe l'image $g[f(x)]$. Cette fonction s'appelle la fonction composée de f par g et se note $g \circ f$.

3. Tracer dans le repère ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{g \circ f}$ représentative de la fonction $g \circ f$.
4. Donner l'expression, en fonction de x , de la fonction $g \circ f$.

Exercice 5009

On considère deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont les courbes, respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g , représentatives sont données dans un repère $(O; I; J)$ orthonormée :



1. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

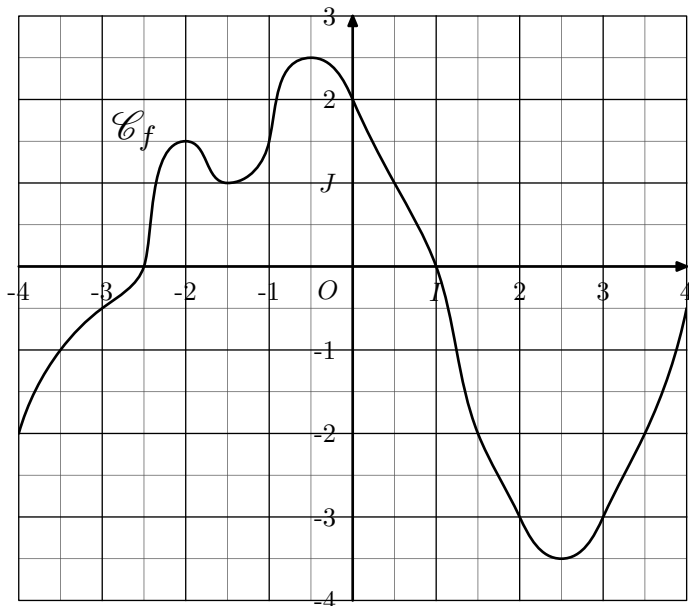
- a. $(f \circ g)(-2)$ b. $(f \circ g)(1,5)$ c. $(f \circ g)(2)$

2. Déterminer la valeur des expressions suivantes :

- a. $(g \circ f)(-3)$ b. $(g \circ f)(0)$ c. $(g \circ f)(1)$

Exercice 5010

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-4; 4]$ dont la courbe \mathcal{C}_f représentative est donnée ci-dessous dans le repère $(O; I; J)$ orthonormé :



1. Calculer les images suivantes :

- a. $(f \circ f)(1)$ b. $(f \circ f)(-2)$ c. $(f \circ f)(3)$

18. Limites et comparaisons :

Exercice 3349

On considère les deux fonctions numériques u et v définies sur \mathbb{R} dont les courbes représentatives \mathcal{C}_u et \mathcal{C}_v sont données dans le repère ci-dessous :

2. On définit la fonction f^n comme la fonction composée n fois de la fonction f par elle-même. Déterminer la valeur des images suivantes :

- a. $f^3(1)$ b. $f^3(-3)$ c. $f^4(-1)$

Exercice 3309

Pour chaque question, déterminer une expression "simplifiée" de l'expression de la composée $f \circ g$ de la fonction g par la fonction f :

- a. $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = 3x - 2$
 b. $f(x) = \sqrt{x - 2}$; $g(x) = 4x^2 + 12x + 11$
 c. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{3x + 1}{2 - x}$
 d. $f(x) = x^2 - x + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$
 e. $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$; $g(x) = \frac{1}{x}$

Exercice 3355

Pour chaque question, déterminer la limite de $g \circ f$ en a :

- a. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $g(x) = \frac{5 - x}{x^2}$; $a = 3$
 b. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x + 3}}$; $g(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$; $a = -3$
 c. $f(x) = \frac{\cos x - 2}{x}$; $g(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^3 + x^2}$; $a = +\infty$

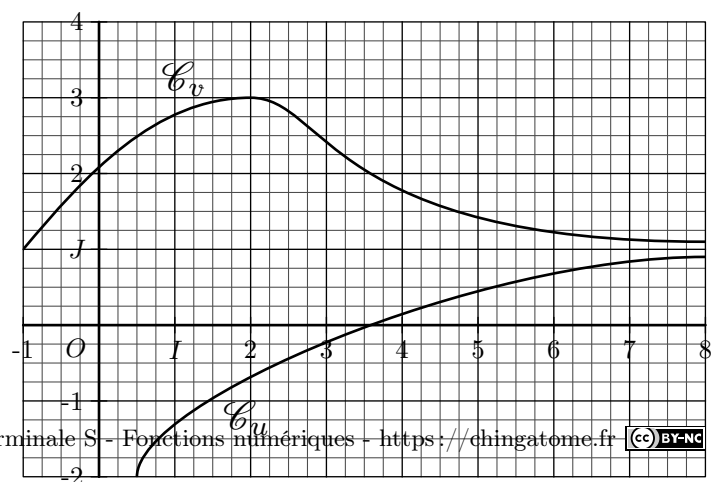
Exercice 5023

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$ vérifiant :
 $f(0) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par la relation :

$$g(x) = \frac{1}{x} \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Déterminer la limite de la fonction g en 0.
- Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
- On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction g . Quelles conséquences peut-on déduire des deux questions précédentes pour la courbe \mathcal{C} ?



1. Dans le repère ci-dessus, tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative d'une fonction f définie sur \mathbb{R} vérifiant la propriété suivante :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a : } u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

2. Supposons que les fonctions u et v admettent les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1$$

Faire une conjecture quand à la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice 3351 

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 2 - \cos x}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur \mathbb{R} .

2. a. Etablir l'encadrement suivant :

$$\frac{5}{x^2 + 3} \leq f(x) \leq \frac{5}{x^2 + 1}$$

- b. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Exercice 3354



Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin(x)}{x}$

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \frac{2 + \cos x}{4} + \sin x$