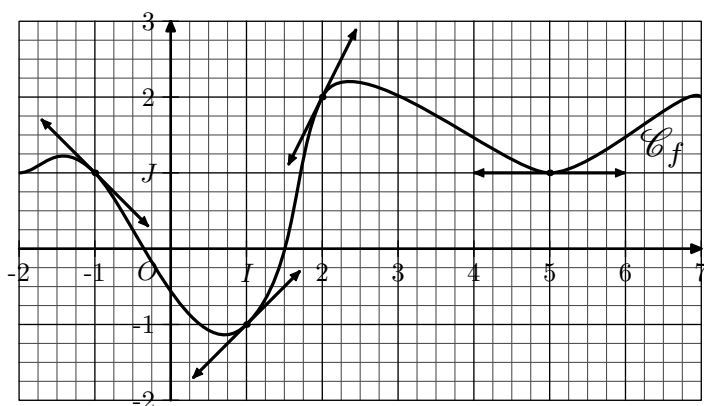


# Terminale S / Derivabilite et continuite

## 1. Révisions sur les dérivés :

### Exercice 3429

On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[-2; 7]$  dont la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  est donnée ci-dessous :



Les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$ , aux points d'abscisses  $-1, 1, 2, 5$  ont été tracées sur la représentation ci-dessus.

- Déterminer le nombre dérivée de la fonction  $f$  en  $-1$  et en  $1$ .
- Déterminer les équations des tangentes à la courbe  $\mathcal{C}_f$  aux points d'abscisses  $2$  et  $5$ .

### Exercice 3314

Déterminer l'expression des fonctions dérivées associées aux fonctions ci-dessous :

a.  $f(x) = -5x^3 + 2x - 2$       b.  $g(x) = \sqrt{x} \cdot (5x + 1)$

c.  $h(x) = \frac{3x - 1}{2 - x}$       d.  $j(x) = \frac{\sqrt{x}}{5 - 2x}$

### Exercice 3912

Il est possible que certains des résultats, à démontrer, ne soient pas lisibles sur l'écran de votre calculatrice graphique.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{10 \cdot (x - 8)}{x \cdot (x - 1)}$$

et on désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative relative à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Déterminer les limites de  $f$  en  $0$  et en  $+\infty$ .
  - Déterminer les limites de  $f$  quand  $x$  tend vers  $1$  par valeurs inférieures et quand  $x$  tend vers  $1$  par valeurs supérieures.

c. En déduire les asymptotes à la courbe  $(\mathcal{C})$ .

- Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
  - Montrer que  $f'(x)$  s'annule pour  $\alpha = 8 + 2\sqrt{14}$  et pour  $\beta = 8 - 2\sqrt{14}$ .
  - Dresser le tableau de variations de  $f$  (on indiquera les valeurs approchées au dixième près des extrémums locaux à l'aide de la calculatrice).

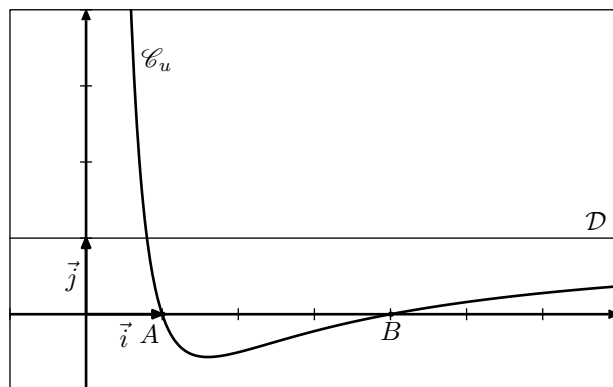
### Exercice 6803

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on désigne par  $\mathcal{C}_u$  la courbe représentative de la fonction  $u$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe  $\mathcal{C}_u$  et la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 1$  :



On précise que la courbe  $\mathcal{C}_u$  passe par les points  $A(1; 0)$  et  $B(4; 0)$  et que l'axe des ordonnées et la droite  $\mathcal{D}$  sont asymptotes à la courbe  $\mathcal{C}_u$ .

- Donner les valeurs de  $u(1)$  et  $u(4)$ .
  - Donner  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$ . En déduire la valeur de  $a$ .
  - En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif :
 
$$u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$$
- On suppose l'existence d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  vérifiant admettant pour dérivée la fonction  $u$  :
 
$$f' = u$$

Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

(it aucune valeur ne sera indiquée dans le tableau)

**Exercice 3312**



Cet exercice est un questionnaire à choix multiples ; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et recopier l'affirmation exacte sans justifier votre choix.

**Barème:** A chaque question est attribué 1 point.

Une réponse inexacte enlève 0,5 point.

Une question sans réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si le total des points est négatif, la note attribuée à l'exercice est ramenée à zéro.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]4; +\infty[$  par :

$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-4}$$

et  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. Une autre expression de  $f(x)$  est :

a.  $f(x) = -2x + 1 - \frac{2}{x-1}$

b.  $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4-x}$

c.  $f(x) = \frac{2x^2 + 9x - 2}{x-4}$

2. Soit  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $]4; +\infty[$ . Une expression de  $f'(x)$  est :

a.  $f'(x) = -2 - \frac{8}{(x-4)^2}$

b.  $f'(x) = \frac{(2-x)(x-6)}{(x-4)^2}$

**2. Dérivées de fonctions composées :**

**Exercice 2337**



Le tableau présente pour chaque ligne une fonction et l'expression de la dérivée. Etablir l'exactitude de chaque ligne.

Fonction	Image de $x$	Nombre dérivé en $x$
$f$	$(3x+2)^6$	$18 \cdot (3x+2)^5$
$g$	$4 \cdot (3-2x)^4$	$-32 \cdot (3-2x)^3$
$h$	$\frac{1}{-2x^2+3x+1}$	$\frac{4x-3}{(2x^2-3x-1)^2}$
$j$	$\sqrt{5x^2+6x-2}$	$\frac{5x+3}{\sqrt{5x^2+6x-2}}$
$k$	$\frac{2x-1}{\sqrt{3-x}}$	$\frac{2x-11}{2 \cdot (x-3) \cdot \sqrt{3-x}}$

**Exercice 3506**



c.  $f'(x) = \frac{-2x^2 + 16x - 24}{(x-4)^2}$

3. La courbe  $\Gamma$  admet pour asymptote :

a. la droite d'équation  $y=4$

b. la droite d'équation  $x=4$

c. la droite d'équation  $y=4x$

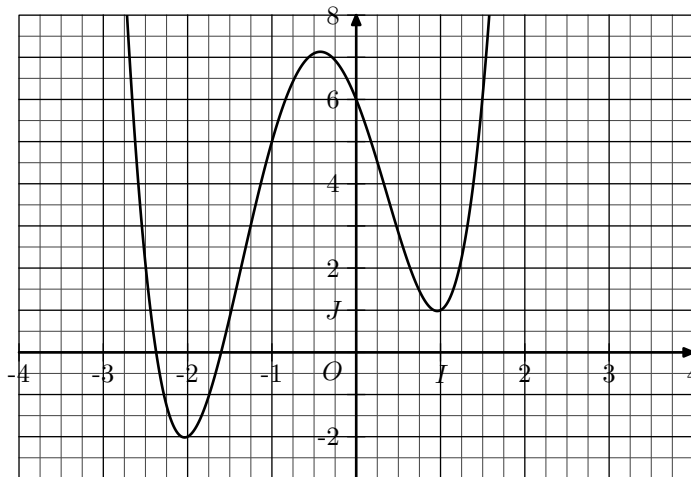
**Exercice 3509**



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$f : x \mapsto \frac{3}{2} \cdot x^4 + 3 \cdot x^3 - \frac{9}{2} \cdot x^2 - 5 \cdot x + 6$$

On donne, ci-dessous, la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère  $(O; I; J)$  :



La courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de cette fonction admet une droite  $(d)$  de coefficient directeur 1 comme tangente en deux points.

Déterminer l'équation de cette droite et les coordonnées de ces deux points.

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

a.  $f(x) = (3 \cdot x + 5)^5$

b.  $g(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4 + 11}$

c.  $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

d.  $j(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

**Exercice 95**



On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f : x \mapsto \sqrt{-2x^2 - x + 6}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction  $f$ .

**Exercice 5217**



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-\infty; -\frac{1}{2}]$  par la relation par la relation suivante :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x - 2}$$

Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  en  $-1$

### Exercice 5065



On considère la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Montrer que la fonction  $f$  admet pour dérivée la fonc-

tion  $f'$  dont l'expression est :

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$$

3. On considère la fonction  $g$  définie par la relation :
 
$$g(x) = f(2x-1)$$
  - a. Déterminer l'expression simplifiée du nombre  $g(x)$  en fonction de  $x$ .
  - b. Déterminer, par la méthode de votre choix, l'expression de la fonction  $g'$  dérivée de la fonction  $g$ .

## 3. Dérivées de fonctions :

### Exercice 2841



Déterminer l'expression, sous une forme simplifiée, des fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| a. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x - 2}$ | b. $g(x) = (\sqrt{x+1})^3$        |
| c. $h(x) = (3x^2 - 2x + 1)\sqrt{x}$ | d. $j(x) = (2x+1)\cdot\sqrt{3-x}$ |

### Exercice 2826



Déterminer, pour chaque fonction, l'expression de la fonction dérivée :

- |                                |   |
|--------------------------------|---|
| a. $f : x \mapsto (4x-2)^7$    | b. $g : x \mapsto \frac{1}{5-3x}$             |
| c. $h : x \mapsto \sqrt{3x-1}$ | d. $j : x \mapsto (3-2x)^3 \cdot \sqrt{4x+1}$ |

Donner l'expression de la fonction  $j$  sous la forme d'un quotient où :

- Le dénominateur est  $\sqrt{4x+1}$
- $(3-2x)^2$  est en facteur au numérateur.

### Exercice 119



Déterminer l'expression de la fonction dérivée pour chacune des fonctions ci-dessous :

- |  |   |
|--|---|
| a. $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ | b. $g : x \mapsto (2x+1)\cdot\sqrt{3x-1}$ |
|--|---|

## 4. Dérivées de familles de fonctions :

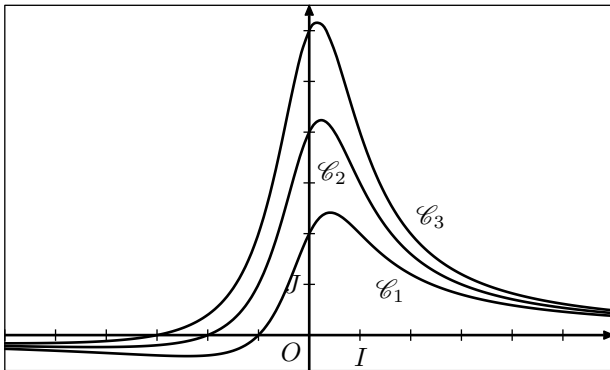
### Exercice 6810



On considère pour tout entier naturel  $n$  non-nul, la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$f_n(x) = \frac{2 \cdot (x+n)}{1+x^2}$$

Dans un repère  $(O; I; J)$  orthonormé, on note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ .



1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée  $f'_n$ .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente  $(d_n)$  à la courbe  $\mathcal{C}_n$  au point d'abscisse 1.
3. a. Etablir l'égalité suivante :
 
$$n \cdot x^3 - (2 \cdot n + 1) \cdot x^2 + (n + 2) \cdot x - 1 = (x-1)^2 \cdot (n \cdot x - 1)$$
- b. Etudier la position relative de la droite  $(d_n)$  et de la courbe  $\mathcal{C}_n$  pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2.

## 5. Etude de la fonction dérivée de fonctions composées :

**Exercice 5062** 

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'image d'un nombre  $x$  est donnée par la relation :

$$f(x) = (5x^2 + 3x + 2)^5$$

- Déterminer l'expression de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ .
- Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$

**Exercice 5752** 

On considère la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = \sqrt{6x^2 + 13x - 5}$$

- Justifier que la fonction  $f$  admet pour ensemble de définition la partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  définie par :

$$I = ]-\infty; -\frac{5}{2}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[.$$

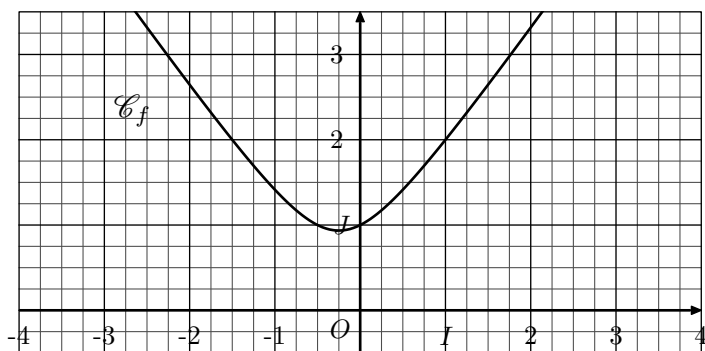
- Déterminer le sens de variation de la fonction  $f$  sur son ensemble de définition  $I$ .

**Exercice 5063** 

On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  est donnée par la relation :

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x + 1}$$



- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- Déterminer le tableau de variations de la fonction  $f$ .
- Dans un repère  $(O; I; J)$ , on donne la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  :

**6. Etude de la fonction dérivée :****Exercice 2348** 


Soit  $f$  la fonction définie par la relation :

$$f: x \mapsto (x + 5)\sqrt{1 - 2x}$$

- Donner l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
- Déterminer l'expression de la fonction dérivée de  $f$ .
- Dresser le tableau de signe de  $f'$ .
- En déduire le tableau de variations de la fonction  $f$
- Justifier que  $f$  admet un extrémum global en  $-\frac{4}{3}$

**Exercice 6163**  

- Déterminer l'équation de la tangente  $(d)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse 1.
- Tracer la droite  $(d)$  dans le repère ci-dessus.

**Exercice 2325** 

On considère deux fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}$  et sur  $[\frac{5}{3}; +\infty[$  par :

$$f(x) = 2(3 - 2x)^5 ; \quad g(x) = \sqrt{3x - 5}$$

- Déterminer l'expression des fonctions dérivées  $f'$  et  $g'$  associées aux fonctions  $f$  et  $g$ .
- Déterminer le signe des fonctions  $f'$  et  $g'$  sur leur ensemble de dérivation.
  - Dresser le tableau de variations de ces deux fonctions.

**Exercice 3510** 

- Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par la relation :

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^4$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  au point d'abscisse 2.

- On considère la fonction  $g$  définie par la relation :

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

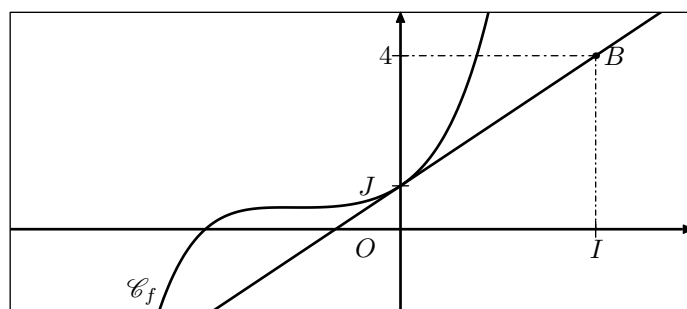
On note  $\mathcal{C}_g$  la courbe représentative de la fonction  $g$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $g$ .
- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_g$  au point d'abscisse  $\frac{3}{2}$ .

On considère la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = (a \cdot x + 1) \cdot (2x^2 + x + 1)^2$$

Dans un repère  $(O; I; J)$  orthogonal donné ci-dessous, on représente la courbe  $\mathcal{C}_f$  représentative de la fonction  $f$  :



La droite  $(d)$  passe par les points  $J$  et  $B(1; 4)$ .

1.
  - a. Justifier que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe par le point  $J$ .
  - b. Déterminer le coefficient de la droite  $(JB)$ .
  - c. Démontrer que tout réel  $x$ , on a :  

$$f'(x) = [10ax^2 + (3a + 8) \cdot x + (a + 2)] \cdot (2x^2 + x + 1)$$

- d. On suppose que la droite  $(JB)$  est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point  $J$ . Déterminer la valeur de  $a$ . Justifier votre réponse.
2. On admet que  $f'$  a pour expressions :  

$$f'(x) = (10x^2 + 11x + 3)(2x^2 + x + 1)$$
 Déterminer les sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

## 7. Lien entre dérivée et nombre dérivée :

### Exercice 5064



Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^4 - 81}{h}$
- b.  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{6 \cdot h + 1} - 1}{h}$
- c.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^8 - 1}{x}$
- d.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 4} - 2}{x}$

### Exercice 5829



Soit  $f$  une fonction numérique dérivable.

1. Soit  $a \in \mathcal{D}_f$ . Etablir la limite suivante :  

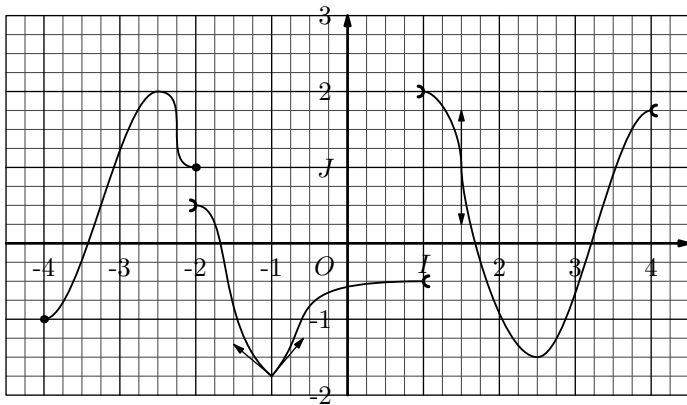
$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x \cdot f(a) - a \cdot f(x)}{x - a} = f(a) - a \cdot f'(a)$$
 On posera :  $x = a + h$ .
2. En déduire la limite :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{x^3 \cdot a - a^3 \cdot x}{x - a}$

## 8. Continuité en un point :

### Exercice 3537



Ci-dessous est donnée la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  ; cette courbe admet une tangente verticale au point d'abscisse 1,5 :



1. Déterminer graphiquement l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
2. Déterminer graphiquement l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $f$ .
3. Déterminer les limites suivantes :
  - a.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
  - b.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
  - c.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
  - d.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
4.
  - a. Combien existe-t-il de nombres  $a$  tels que :  

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$
  - b. Quelle particularité graphique ont les points d'abscisse  $a$  vérifiant une telle condition?

### Exercice 3538



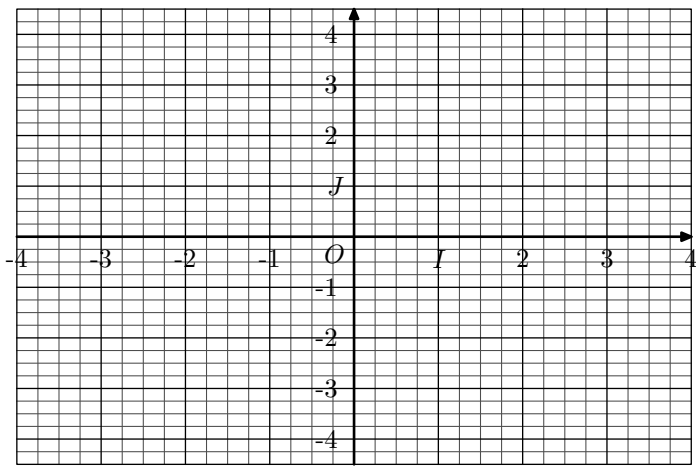
La partie entière de 5,5 est 5 ; pour étendre, cette notion à l'ensemble des nombres réels (*et particulièrement aux nombres négatifs*), on définit la partie entière d'un nombre  $x$ , qu'on note  $E(x)$ , de la manière suivante :

*"E(x) est le plus grand entier de l'ensemble des entiers inférieurs ou égaux à x"*

1.
  - a. Supposons que  $x = -2,5$ , justifier que  $E(x) = -3$ .
  - b. Compléter le tableau suivant :
 

$x$	-4,5	-4	-3,9	-3,2	-3
$E(x)$					
  - c. Justifier l'encadrement suivant pour tout nombre réel  $x$  :  

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$
2.
  - a. On considère le repère orthogonal  $(O; I; J)$  ci-dessous ; effectuer la représentation graphique de la fonction  $E$  sur  $[-4; 4]$



b. Quelles particularités possède cette courbe?

**Exercice 5825** 

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par la relation :

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

1. Justifier que la fonction  $h$  n'est pas continue en 0.

**9. Dérivabilité en un point :**

**Exercice 3541**  

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x + 3 & \text{pour tout } x \in ]-\infty; -1] \\ f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} & \text{pour tout } x \in ]-1; +\infty[ \end{cases}$$

1. a. Effectuer le tracé de la fonction  $f$  à l'aide de votre calculatrice.  
 b. Faire une conjecture sur la continuité et sur la dérivabilité de la fonction  $f$ .

2. Justifier que la fonction  $f$  est continue en  $-1$ .

3. Justifier que la fonction  $f$  est dérivable en  $-1$ .

**Exercice 3600**  

**A - Etude d'une fonction :**

On considère la fonction  $f$  définie par la relation :

$$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $\mathcal{D}_f$  de la fonction  $f$ .

2. Déterminer les deux limites suivantes :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x \neq 0}} f(x) ; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x \neq 0}} f(x)$$

**Exercice 3539**  

1. On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

c. Peut-on dire que la fonction  $f$  est continue en 0?

2. On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \neq 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Justifier que la fonction  $g$  est continue en 0.

2. a. Etudier les deux limites suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} ; \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

b. Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $-1$  et en  $1$ .

3. a. Déterminer l'expression de la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .

b. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

**B - Prolongement par continuité :**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la manière suivante :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \\ g(x) = -x^3 + x^2 + x - 1 & \text{pour } x \in [-1; 1] \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction  $g$ . Justifier vos affirmations.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ .

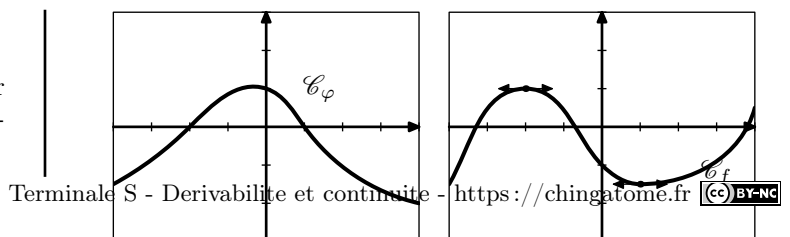
4. Justifier l'existence d'un unique nombre  $\alpha$  appartenant à  $\mathbb{R}$  vérifiant les deux conditions suivantes :

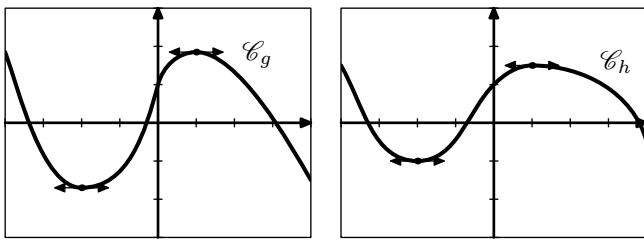
$$g(\alpha) = 2 ; \quad 2 < \alpha < 2,1$$

**10. Introduction aux primitives :**

**Exercice 3575** 

On considère quatre fonctions  $\varphi$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  définies sur l'intervalle  $[-4; 4]$ . Leurs courbes représentatives sont données, ci-dessous, dans un même repère orthonormé :



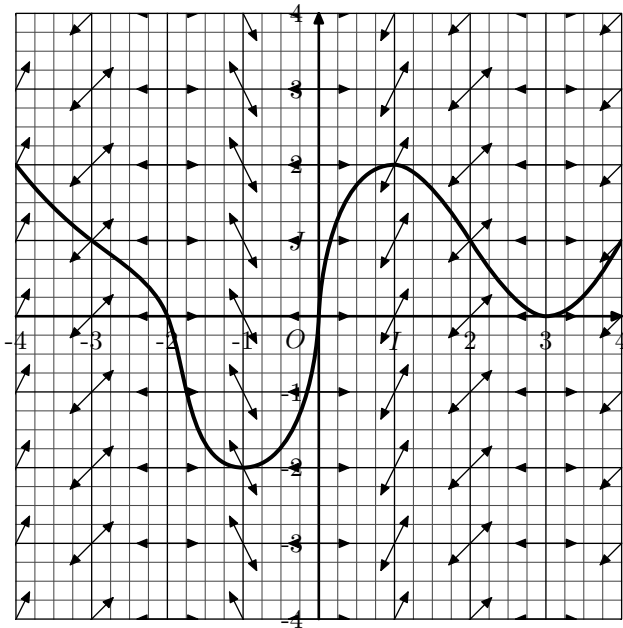


Quelle fonction, parmi  $f$ ,  $g$  et  $h$ , peut admettre la fonction  $\varphi$  comme fonction dérivée?

**Exercice 3560**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur l'intervalle  $[-4; 4]$  et admettant la fonction  $f'$  comme dérivée.

Dans le repère ci-dessous, est tracée la courbe représentative de la fonction  $f'$ .



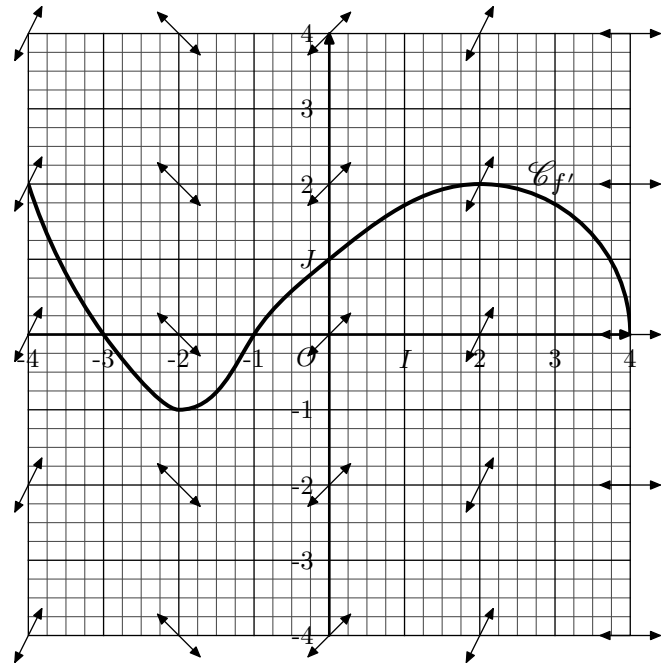
1. a. Quelle est la valeur du nombre dérivée de la fonction  $f$  en 1?
- b. Donner le coefficient directeur de toutes les tangentes

représentées sur la droite d'équation  $x=1$ .

2. Tracer une représentation "possible" de la fonction  $f$  dans ce repère.

**Exercice 3561**

On considère une fonction  $f$  dérivable sur  $[-4; 4]$ . Dans le repère orthonormé  $(O; I; J)$  ci-dessous est donnée la courbe représentative  $\mathcal{C}_{f'}$  de la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .



1. a. Quelle est le nombre dérivée de la fonction  $f$  en  $-2$ .
- b. Tout au long de la droite d'équation  $x=-2$  sont représentés des tangentes; quel est le coefficient de ces tangentes.
2. Tracer une courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  acceptable de la fonction  $f$  dont les tangentes aux points d'abscisses  $-4, -2, 0, 2, 4$  sont, dans chaque cas, une des tangentes proposées sur le graphique.

**11. Tableau de signes sans le théorème des valeurs intermédiaires :**

**Exercice 5102**

1. Considérons la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :
 
$$g(x) = -8x^3 + 4x - 4$$
  - a. Dresser le tableau de variations de la fonction  $g$ . (on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)
  - b. En observant que  $g(-1) = 0$ , dresser le tableau de signe de la fonction  $g$ .

2. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :
 
$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{(2x^2 + 2x + 3)^2}$$
  - a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
  - b. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

- c. Etablir que la fonction  $f$  admet pour dérivée la fonction  $f'$  dont l'expression est donnée par la relation :
 
$$f'(x) = \frac{-8x^3 + 4x - 4}{(2x^2 + 2x + 3)^3}$$
- d. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ . (on utilisera des valeurs approchées pour compléter le tableau)
- e. En déduire le tableau de signe de la fonction  $f$ .

**Exercice 2927**

1. Soit  $n$  un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par la relation :
 
$$f(x) = (1 + x)^n - 1 - n \cdot x$$
 Etablir le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre  $x$  positif

et tout entier naturel  $n$  strictement positif :

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : **Inégalité de Bernoulli**

## 12. Théorème des valeurs intermédiaires :

### Exercice 3543



On considère une fonction  $f$  qui admet le tableau de variations suivant :

$x$	-5	1	5	$10^3$
Variation de $f$	4		-1	5
		-6		-13

- Justifier que la fonction  $f$  s'annule deux fois sur son ensemble de définition.
- Soit  $m$  un nombre réel. Discuter en fonction de la valeur de  $m$  du nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$ .

### Exercice 6239

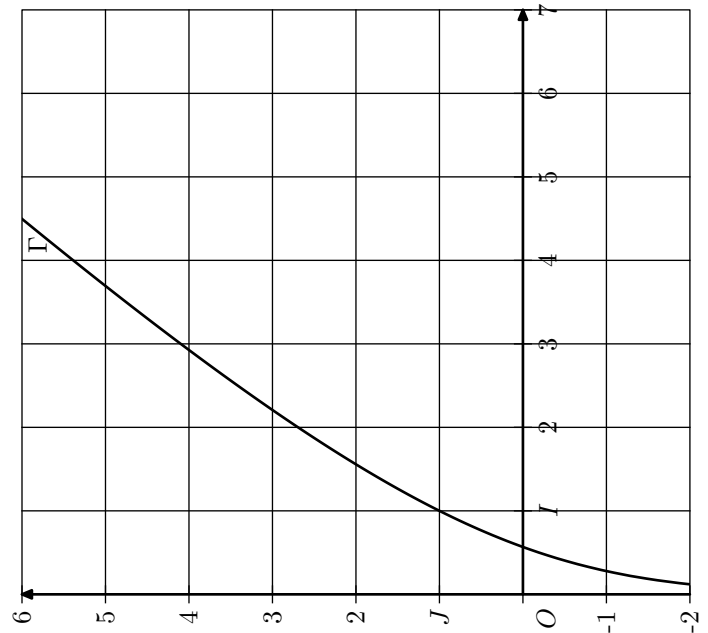


On considère la fonction  $f$  définie, continue et strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

On nomme  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan.

- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .  
On note  $\alpha_n$  cette solution.
- Sur la page annexe, on a tracé  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Placer les nombres  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



### Exercice 3544



On considère la fonction  $f$  dont l'image d'un nombre  $x$  est définie par la relation :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 1}{x + 1}$$

Notons  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .
  - Déterminer les limites de la fonction  $f$  en ses bornes.
  - La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet-elle des asymptotes? Si oui, préciser lesquelles.
- Déterminer l'expression de la fonction  $f'$  dérivée de la fonction  $f$ .
  - Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
- Justifier que la fonction  $f$  ne s'annule qu'une fois sur l'intervalle  $[1; +\infty[$ .
  - Tracer la courbe représentative de la fonction  $f$  à l'aide de votre calculatrice; utiliser les fonctions de votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée de ce zéro de la fonction  $f$ .

## 13. Etudes de sous-fonctions :

### Exercice 3557



- On considère la fonction polynôme  $P$  définie pour tout

réel  $x$  par :

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

- Etudier les variations de  $P$ .



- b. Montrer que l'équation  $P(x)=0$  admet une racine réelle et une seule,  $\alpha$ , et que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]1,6; 1,7[$

2. Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des réels strictement supérieurs à  $-1$ . On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathcal{D}$  par :

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$$

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à une repère orthonormé (on prendra comme unité 4 cm).

- a. Etudier les variations de  $f$  (on utilisera pour cela les résultats du 1.).

- b. Ecrire une équation de la droite  $(\Delta)$  tangente à la courbe  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe  $(\mathcal{C})$  par rapport à la droite  $(\Delta)$  dans l'intervalle  $] -1; 1[$ .

- c. Montrer que la courbe  $(\mathcal{C})$  est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1. Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ , la droite  $(\Delta)$  et la tangente à  $(\mathcal{C})$  au point d'abscisse 1.

## 14. Etudes de dérivées et dérivées seconde :

### Exercice 3562



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'image d'un nombre  $x$  est définie par la relation :

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$$

1. Déterminer l'expression de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , ainsi que celle de la dérivée seconde  $f''$ .

2. a. Etudier le signe de la fonction  $f''$ .

- b. En déduire le tableau de variations de la fonction  $f'$ . (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

3. a. Montrer que la fonction  $f'$  s'annule pour  $x=1$  et aussi en un nombre  $\alpha$  vérifiant l'encadrement :  $0,2 < \alpha < 0,3$

- b. En déduire le tableau de signe de la fonction  $f'$ .

4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- b. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ . (Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

### Exercice 5812



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  dont l'image d'un nombre réel  $x$  est définie par l'expression :

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 1} - 2 \cdot x$$

Le but de l'exercice est de montrer que la fonction  $f$  admet un maximum global et d'obtenir une valeur approchée.

1. a. Montrer que la dérivée seconde de la fonction  $f$  admet pour expression :

$$f''(x) = \frac{3}{(x^2 + 1) \cdot \sqrt{x^2 + 1}}$$

- b. Etablir les deux limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -5 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$$

- c. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f'$ .

2. a. Justifier que la fonction  $f'$  s'annule une unique fois sur  $\mathbb{R}$ .

- b. On note  $\alpha$  l'unique solution de l'équation :  $f'(x)=0$ . Justifier brièvement que le nombre  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $[0,8; 0,9]$ .

3. a. Dresser le tableau de signe de la fonction  $f'$ .

- b. Justifier que la fonction  $f$  admet un minimum global qui est atteint pour  $x=\alpha$ .

## 15. Dichotomie :

### Exercice 3534



On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x^3 + 3 \cdot x$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .

- b. Justifier que le nombre 5 admet un unique antécédent par la fonction  $f$  ; on notera  $\alpha$  ce nombre.

2. On pose pour valeur  $a_0=0$  et  $b_0=2$ . On souhaite construire par la méthode de dichotomie les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  adjacentes et convergentes vers  $\alpha$ .

- a. Compléter le tableau ci-dessous :

	$a_n$	$c_n$	$b_n$	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$						
$n=1$						
$n=2$						
$n=3$						
$n=4$						
$n=5$						

b. Avec quelle précision obtient-on la valeur de  $\alpha$  à l'aide | du tableau.