Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Terminale S/Annales sur les probabilités

1. Probabilités et suites :

Exercice 3188

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : "*Pierre gagne la n-ième partie*".
- P_n : "*Pierre perd la n-ième partie*".

On pose : $p_n = \mathcal{P}(G_n)$ et $q_n = \mathcal{P}(P_n)$.

1. Recherche d'une relation de récurrence.

   a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $\mathcal{P}_{G_1}(G_2)$ et $\mathcal{P}_{P_1}(G_2)$.

   b. Justifier l'égalité : $p_n + q_n = 1$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = 0{,}5 \cdot p_n + 0{,}2$.

2. Etude de la suite (p_n).

   On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

   a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n.

   b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4326

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement "*le joueur gagne la n-ième partie*" ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc : $p_1 = 0{,}1$

1. Montrer que $p_2 = 0{,}62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première. *(on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près).*
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $p_{n+1} = \dfrac{1}{5} \cdot p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
   $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4} \cdot \Big(\dfrac{1}{5}\Big)^n$
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :
   $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?

Exercice 6800

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.
Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièves.
Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1-a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1


```
Fonction f(n)
    a ← 0
    b ← 0
    Pour i allant de 1 à n faire
        d ← d'un entier
           aléatoire compris entre 1 et 6
        Si d⩽2
            Alors a ← 1−a
            Sinon
                Si d⩽4
                    Alors b ← 1−b
                Fin Si
        Fin Si
        s ← a+b
    Fin Pour
    Renvoyer s
```

(a.) On appelle la fonction `f` avec pour argument `n`$=3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4.
Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1^{er} passage boucle Pour					
2^{e} passage boucle Pour					
3^{e} passage boucle Pour					

(b.) L'appel à la fonction `f` permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

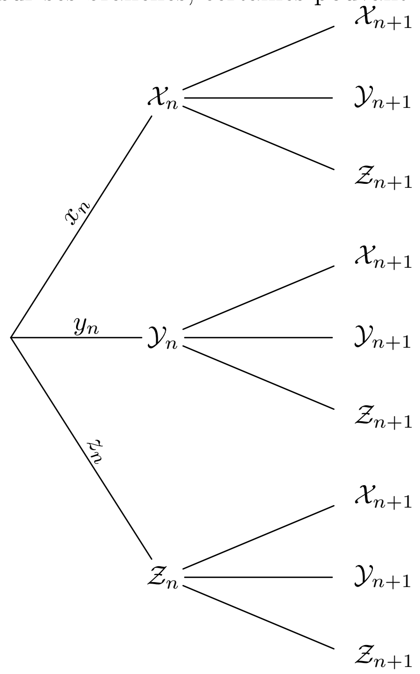
- $\mathcal{X}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face*"
- $\mathcal{Y}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face*"
- $\mathcal{Z}_n$ l'évènement : "*A l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile*".

De plus on note, $x_n=\mathcal{P}(\mathcal{X}_n)$, $y_n=\mathcal{P}(\mathcal{Y}_n)$ et $z_n=\mathcal{P}(\mathcal{Z}_n)$ les probabilités respectives des évènements $\mathcal{X}_n$, $\mathcal{Y}_n$ et $\mathcal{Z}_n$:

(a.) Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

(b.) Justifier que : $\mathcal{P}_{\mathcal{X}_n}(\mathcal{X}_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$

(c.) Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



(d.) Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

(e.) En déduire que, pour tout entier naturel n, :

$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}\cdot y_n + \frac{2}{3}$$

(f.) On pose, pour tout entier naturel n : $b_n=y_n-\dfrac{1}{2}$

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.
En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

(g.) Calculer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} y_n$.
Interpréter le résultat.

2. Lois uniformes et exponentielles :

Exercice 3206

La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda>0$.

Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en passe avant l'instant t est égale à :

$$P(\mathcal{X}\leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx$$

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-1} près, pour que la probabilité $P(\mathcal{X}>6)$ soit égale à 0,3.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$

2. A quel instant t, à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de 0,5?

3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est $e^{-0,4}$.

4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans?

5. On considère un lot de 10 robots fonctionnant de

manière indépendante.
Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Exercice 3164

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle $\mathcal{X}$ le nombre de composants défectueux achetés. Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactement deux des composants achetés soient défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux?

Partie B

On suppose que la durée de vie $\mathcal{T}_1$ *(en heures)* de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1=5\times10^{-4}$ et que la durée de vie $\mathcal{T}_2$ *(en heures)* de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2=10^{-4}$ *(on pourra se reporter au formulaire ci-dessous)*

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures:
   a. si ce composant est défectueux;
   b. si ce composant n'est pas défectueux. Donner une valeur approchée de ces probabilités à 10^{-2} près.
2. Soit $\mathcal{T}$ la durée de vie *(en heures)* d'un composant acheté au hasard.
   Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est:
   $P(\mathcal{T}\geqslant t) = 0{,}02\cdot e^{-5\times10^{-4}t} + 0{,}98\cdot e^{-10^{-4}t}$
   (on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02)
3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux?
   Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire: Loi exponentielle *(ou de durée de vie sans vieillissement)* de paramètre λ sur $[0\,;+\infty[$:

- Pour $0\leqslant a\leqslant b$, $P([a\,;b])=\displaystyle\int_a^b \lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx$
- Pour $c\geqslant 0$, $P([c\,;+\infty[)=1-\displaystyle\int_0^c \lambda\cdot e^{-\lambda x}\,dx$

Exercice 3162

Cet exercice comporte ***deux parties indépendantes.***
La partie ***I*** *est la démonstration d'un résultat de cours. La partie* ***II*** *est un Q.C.M.*

Partie I: question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des question suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse enlève 0,5 point. L'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie ***II*** *est ramenée à zéro.*

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. `(hors programme 2012)`

   On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge?

   a. $\dfrac{75}{512}$ b. $\dfrac{13}{56}$ c. $\dfrac{15}{64}$ d. $\dfrac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25

   Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe?

   a. $\dfrac{1}{120}$ b. $\dfrac{3}{40}$ c. $\dfrac{1}{12}$ d. $\dfrac{4}{40}$

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

   Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   Quelle est la variance de $\mathcal{X}$?

   a. 2 b. 13 c. 16 d. 17

4. La durée d'attente $\mathcal{T}$, en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t>0$:
   $$P(\mathcal{T}<t) = \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda x}dx \quad (avec\ \lambda=\frac{1}{6})$$
   où t désigne le temps exprimé en minutes.

   Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité *(arrondie à 10^{-4})* que son temps total soit inférieur à 5 minutes?

   a. 0,2819 b. 0,3935 c. 0,5654 d. 0,6065

3. Loi normale et probabilité conditionnelle :

Exercice 6073

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que $\mathcal{X}$ suit une loi normale de moyenne $\mu_1=36$ et d'écart-type $\sigma_1=0{,}2$ et que $\mathcal{Y}$ suit la loi normale de moyenne $\mu_2=6$ et d'écart-type $\sigma_2=0{,}05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1-3\sigma_1$ et $\mu_1+3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur?

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre $5{,}88\,mm$ et $6{,}12\,mm$. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que $\mathcal{Y}$ soit inférieure ou égal à cette valeur.

k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$	k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$	k	$\mathcal{P}(\mathcal{Y}\leqslant k)$
5,8	3,16712E-05	5,94	0,11506967	6,08	0,945200708
5,82	0,000159109	5,96	0,211855399	6,1	0,977249868
5,84	0,000687138	5,98	0,344578258	6,12	0,991802464
5,86	0,00255513	6	0,5	6,14	0,99744487
5,88	0,008197536	6,02	0,655421742	6,16	0,999312862
5,9	0,022750132	6,04	0,788144601	6,18	0,999840891
5,92	0,054799292	6,06	0,88493033	6,2	0,999968329

Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre *(on pourra s'aider du tableau ci-contre)*.

3. On prélève une pièce au hasard. On appelle L l'évènement "*la pièce est conforme pour la longueur*" et D l'évènement "*la pièce est conforme pour le diamètre*".

On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.
Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée *(le résultat sera arrondi à 10^{-2})*.

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

5. Lois normales et intervalle de fluctuations :

Exercice 6422

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A*" ;
- B l'évènement "*la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B*" ;
- V l'évènement "*la personne interrogée dit la véritée*".

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

> 52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
>
> * estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1200 personnes

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut-il croire en sa victoire? *(on utilisera des valeurs approchées au millième près)*

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif?

Exercice 6766

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois.

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de "*pur jus*" est notée x, où x est un réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation "*pur jus*".

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les évènements suivants :

- R : "*la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange*" ;
- J : "*la bouteille prélevée est une bouteille de pur jus*".

Partie A

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Déterminer la valeur exacte de x.
3. Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de "*pur jus*".
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot de 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de "*pur jus*" dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire $\mathcal{X}$. On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de "*pur jus*". On arrondira le résultat au millième.

Partie C

Un fournisseur assure que 90 % des bouteilles de sa production de pur jus d'orange contiennent moins de 2 % de pulpe. Le service qualité du supermarché prélève un échantillon de 900 bouteilles afin de vérifier cette affirmation. Sur cet échantillon, 766 bouteilles présentent moins de 2 % de pulpe.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de bouteilles contenant moins de 2 % de pulpe au seuil de 95 %.
2. Que penser de l'affirmation du fournisseur?

Exercice 5538

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes. Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non-commerciable, un pain dont la masse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale d'espérance $\mu=400$ et d'écart-type $\sigma=11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche

x	308	385	390	395	400	405	410	415	420
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $\mathcal{P}(390\leqslant\mathcal{X}\leqslant410)$.
2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.
3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

   Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 %? On arrondira le résultat au dixième.

   On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque $\mathcal{Z}$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 1, on a :
   $\mathcal{P}(\mathcal{Z}\leqslant-1{,}751)\approx0{,}040$

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables. Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de 300.
2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.
Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1., peut-on décider que l'objectif est atteint?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite, on prendra : $\lambda=0{,}003$

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison? Si non, pour combien de jours est-ce vrai?

6. Lois normales et intervalle de confiances :

Exercice 6071

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et $\mathcal{X}_n$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $\mathcal{F}_n=\dfrac{\mathcal{X}_n}{n}$ et f la valeur prise par f la valeur prise par F_n. On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\Big[p-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;p+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\Big[f-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\,;f+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi les trois réponses possibles.

On note r la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard *(de façon équiprobable)*.

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :
   - A : *"l'étudiant répond A"* ;
   - B : *"l'étudiant répond B"* ;
   - C : *"l'étudiant répond C"* ;
   - R : *"l'étudiant connaît la réponse"* ;
   - $\overline{R}$: l'évènement contraire de R.

   a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est :
   $$\mathcal{P}(A)=\frac{1}{3}\cdot(1+2\cdot r).$$

   c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisie A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes résponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiant revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

   a. Donner la loi de $\mathcal{X}$ et ses paramètres n et p en fonction de r.

   b. Dans un premier sondage, on contaste que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.
   Donner un intervalle de confiance au seuil de 95 % de l'estimation de p.
   En déduire un intervalle de confiance au seuil de 95 % de r.

   c. Dans la suite, on suppose que r=0,4. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que $\mathcal{X}$ suit une loi normale.
   - Donner les paramètres de cette loi normale.
   - Donner une valeur approchée de $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 250\big)$ à 10^{-2} près.
     On pourra s'aider de la tableau ci-dessous 1, qui donne une valeur approchée de $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant t\big)$ où $\mathcal{X}$ est la variable aléatoire de la question 2. b..

C3 | =LOI.NORMALE($A12+E$1;240;RACINE(96);VRAI)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0,0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
2	235	0,305	0,309	0,312	0,316	0,319	0,323	0,327	0,33	0,334	0,338
3	236	0,342	0,345	0,349	0,353	0,357	0,36	0,364	0,368	0,372	0,376
4	237	0,38	0,384	0,388	0,391	0,395	0,399	0,403	0,407	0,411	0,415
5	238	0,419	0,423	0,427	0,431	0,435	0,439	0,443	0,447	0,451	0,455
6	239	0,459	0,463	0,467	0,472	0,476	0,48	0,484	0,488	0,492	0,496
7	240	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,52	0,524	0,528	0,533	0,537
8	241	0,541	0,545	0,549	0,553	0,557	0,561	0,565	0,569	0,573	0,577
9	242	0,581	0,585	0,589	0,593	0,597	0,601	0,605	0,609	0,612	0,616
10	243	0,62	0,624	0,628	0,632	0,636	0,64	0,643	0,647	0,651	0,655
11	244	0,658	0,662	0,666	0,67	0,673	0,677	0,681	0,684	0,688	0,691
12	245	0,695	0,699	0,702	**0,706**	0,709	0,713	0,716	0,72	0,723	0,726
13	246	0,73	0,733	0,737	0,74	0,743	0,746	0,75	0,753	0,756	0,759
14	247	0,763	0,766	0,769	0,772	0,775	0,778	0,781	0,784	0,787	0,79
15	248	0,793	0,796	0,799	0,802	0,804	0,807	0,81	0,813	0,815	0,818
16	249	0,821	0,823	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839	0,841	0,844
17	250	0,846	0,849	0,851	0,853	0,856	0,858	0,86	0,863	0,865	0,867
18	251	0,869	0,871	0,874	0,876	0,878	0,88	0,882	0,884	0,886	0,888
19	252	0,89	0,892	0,893	0,895	0,897	0,899	0,901	0,903	0,904	0,906
20	253	0,908	0,909	0,911	0,913	0,914	0,916	0,917	0,919	0,921	0,922
21	254	0,923	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932	0,933	0,935	0,936
22	255	0,937	0,938	0,94	0,941	0,942	0,943	0,944	0,945	0,947	0,948
23	256	0,949	0,95	0,951	0,952	0,953	0,954	0,955	0,956	0,957	0,958
24	257	0,959	0,96	0,96	0,961	0,962	0,963	0,964	0,965	0,965	0,966
25	258	0,967	0,968	0,968	0,969	0,97	0,97	0,971	0,972	0,972	0,973
26	259	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977	0,977	0,978	0,978	0,979
27	260	0,979	0,98	0,98	0,981	0,981	0,982	0,982	0,983	0,983	0,984

Exrtait d'une feuille de calcul

Exemple d'utilisation : au croisement de la ligne 12 et de la colonne E le nombre 0,706 correspond à $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}\leqslant 245{,}3\big)$

Exercice 6767

Partie A

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fourni les caractéristiques suivantes :

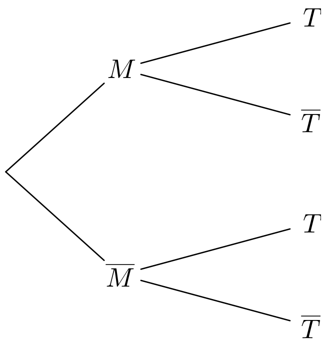
- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98 ;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans une population “*cible*”. Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l’évènement : “*l’individu choisi est atteint du chikungunya*”
- T l’évènement : “*le test de l’individu choisi est positif*”

On notera $\overline{M}$ *(respectivement $\overline{T}$)* l’évènement contraire de l’évènement M *(respectivement T)*.
On note p $(0\leqslant p\leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. a. Recopier et compléter l’arbre de probabilité ci-dessous :



   b. Exprimer $\mathcal{P}(M\cap T)$, $\mathcal{P}(\overline{M}\cap T)$ puis $\mathcal{P}(T)$ en fonction de p.

2. a. Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :
$$f(p)=\frac{98{\cdot}p}{97{\cdot}p+1}$$

   b. Etudier les variations de la fonction f.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité d’une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à 0,95.
En utilisant les résultats de la question 2., à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable?

Partie B

En Juillet 2014, l’institut de veille sanitaire d’une île, en s’appuyant sur les données remontées par les médecins, publie que 15 % de la population est atteinte par le virus.

Comme certaines personnes ne consultent pas forcément leur médecin, on pense que la proportion est en réalité plus importante.
Pour s’en assurer, on se propose d’étudier un échantillon de 1 000 personnes choisies au hasard dans cette île. La population est suffisamment importante pour considérer qu’un tel échantillon résulte de tirages avec remise.

On désigne par $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1000 personnes choisies au hasard, fait correspondre le nombre de personnes atteintes par le virus et par $\mathcal{F}$ la variable aléatoire donnant la fréquence associée.

1. a. Sous l’hypothèse $p=0{,}15$, déterminer la loi de $\mathcal{X}$.

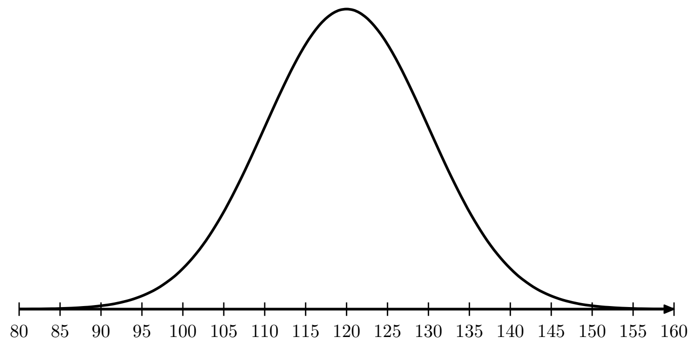
   b. Dans un échantillon de 1000 personnes choisies au hasard dans l’île, on dénombre 197 personnes atteintes par le virus.
Quelle conclusion peut-on tirer de cette observation à propos du chiffre de 15 % publié par l’institut de veille sanitaire?
Justifier. *(On pourra s’aider du calcul d’un intervalle de fluctuation au seuil de 95 %)*

2. On considère désormais que la valeur de p est inconnue.

   En utilisant l’échantillon de la question 1. b., proposer un intervalle de confiance de la valeur de p, au niveau de confiance de 95 %.

Partie C

Le temps d’incubation, exprimé en heures, du virus peut être modélisé par une variable alátoire $\mathcal{T}$ suivant une loi normale d’écart type $\sigma=10$.
On souhaite déterminer sa moyenne μ.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité $\mathcal{T}$ est donnée ci-dessous :



1. a. Conjecturer, à l’aide du graphique, une valeur approchée de μ.

   b. On donne $\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant 110)=0{,}18$. Hachurer sur le graphique un domaine dont l’aire correspond à la probabilité donnée.

2. On note $\mathcal{T}'$ la variable aléatoire égale à $\dfrac{\mathcal{T}-\mu}{10}$.

   a. Quelle loi la variable aléatoire $\mathcal{T}'$ suit-elle?

   b. Déterminer une valeur approchée à l’unité près de la moyenne μ de la variable aléatoire $\mathcal{T}$ et vérifier la conjecture de la question 1..

7. Probabilités conditionnelles ⚠ *:*

Exercice 1449

Un joueur dispose d’une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes $(0\leqslant n\leqslant 10)$. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l’urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   a. R : “*la boule tirée est rouge*”.

   b. B : “*la boule tirée est blanche*”.

   c. V : “*la boule tirée est verte*”.

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
Le joueur tire une boule de l'urne :

- si elle est rouge, il gagne $16\,F$;
- si elle est blanche, il perd $12\,F$;
- si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
  - si cette boule est rouge, il gagne $8\,F$;
  - si cette boule est blanche, il perd $2\,F$;
  - si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
Au début de la partie, le joueur possède $12\,F$. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie *(un tirage ou deux tirages selon le cas)*.

a. Déterminer les valeurs prises par $\mathcal{X}$.

b. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

c. Montrer que l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ est :
$$E(\mathcal{X}) = 12 + 16\cdot\frac{n}{(n+7)^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$
Etudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique $\mathcal{X}$ est maximale. Calculer cette valeur maximale *(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)*.

8. Evénements indépendants :

Exercice 3732

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches. On en prélève n successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère les deux évènements suivants :

- A : "*On obtient des boules des deux couleurs*" ;
- B : "*On obtient au plus une blanche*".

1. a. Calculer la probabilité de l'évènement : "*Toutes les boules tirées sont de même couleur*".

b. Calculer la probabilité de l'évènement : "*On obtient exactement une boule blanche*".

c. En déduire que les probabilités $p(A\cap B)$, $p(A)$, $p(B)$ sont :
$$p(A\cap B) = \frac{n}{2^n} \quad ; \quad p(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad ; \quad p(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

2. Montrer que $p(A\cap B) = p(A)\times p(B)$ si, et seulement si : $2^{n-1} = n+1$

3. Soit (u_n) la suite définie par :
$u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$.

Calculer u_2, u_3, u_4.
Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. En déduire la valeur de l'entier n tel que les évènements A et B soient indépendants.

9. Probabilité conditionnelles et loi binomiale :

Exercice 3834

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune :

- La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges.
- La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1€ et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les évènements :
   - E : "*à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges*" ;
   - F : "*à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge*".

   Montrer que : $p(E) = 0{,}02$; $p(F) = 0{,}17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 € ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien.

$\mathcal{X}$ désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur *(rappel le joueur mise 1€)*.

a. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.

b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{X}$ et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes *(n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2)*

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1-(0{,}9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0{,}9$?

Exercice 4142

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir : sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 1 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour la population entière et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note :

- M l'évènement : "*l'animal est porteur de la maladie*" ;
- T l'évènement : "*le test est positif*".

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.

2. Un animal est choisi au hasard.

   a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif?

   b. Montrer que la probabilité pour que son test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie?

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par $\mathcal{X}$?

   b. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif?

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abatage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratui.

   D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donné par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

   a. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

   b. Un éleveur possède un troupeu de 200 bêtes. Si tout le troupeau est soumis au test, quelle somme doit-il prévoir d'engager?

Exercice 3130

La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A- Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8.

Pour $i=1$ ou $i=2$, on note E_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Est le i-ième jour*" et O_i l'évènement : "*Le touriste se dirige vers l'Ouest le i-ième jour*".

1. Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Déterminer les probabilités suivantes :
   $p(E_1)$; $p_{E_1}(O_2)$; $p(E_1 \cap E_2)$

3. Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage les deux jours consécutifs.

B- On suppose maintenant que n touristes $(n \geqslant 3)$ se retrouvent un jour en haut de la falaise. Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la plage à l'Est.

1. Déterminer la probabilité que k touristes $(0 \leqslant k \leqslant n)$ partent en direction de l'Est.

2. On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est heureux s'il se retrouve seul sur une plage.

   a. Peut-il y avoir deux touristes heureux?

   b. Démontrer que la probabilité *(notée p)* qu'il y ait un touriste heureux parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

   c. **Application numérique :**
   Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10.

10. *Schémas de Bernoulli et loi binomiale* :

Exercice 4193

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit $\mathcal{X}_i$ la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ième trajet et la valeur 0 sinon. Soit $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie par :

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 + \mathcal{X}_3 + \cdots + \mathcal{X}_{40}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de $\mathcal{X}$.
2. Dans cette partie, on suppose que $p=\dfrac{1}{20}$.
   a. Calculer l'espérance mathématiques de $\mathcal{X}$.
   b. Calculer les probabilités :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}=0)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$; $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$
   c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.
3. Soit $\mathcal{Z}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur. Justifier l'égalité :
   $\mathcal{Z} = 400 - 100\cdot\mathcal{X}$,
   puis calculer l'espérance de $\mathcal{Z}$ pour $p=\dfrac{1}{5}$.
4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.
   a. Démontrer que :
   $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2) = (1-p)^{38}\cdot\big(741\cdot p^2 + 38\cdot p + 1\big)$
   b. Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;1\big]$ par :
   $f(x) = (1-x)^{38}\cdot\big(741\cdot x^2 + 38\cdot x + 1\big)$
   Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ tel que : $f(x_0)=0{,}01$
   Déterminer l'entier naturel n tel que :
   $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$
   c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %. *(On exprimera p en fonction de x_0)*

