Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminale S/Annales sur les nombres complexes

1. Algèbre :

Exercice 3190

Partie A. Restitution organisée de connaissances

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :

- Si z est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| = r \\ \arg z = \theta \quad \text{à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big) \\ r > 0 \end{cases}$$

- Pour tous nombres réels a et b :

$$\begin{cases} \cos\big(a+b\big) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ \sin\big(a+b\big) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \end{cases}$$

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls.
Démontrer les relations :
$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2| \quad ; \quad \arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1)+\arg(z_2)$ à 2π près.

Partie B

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple. Une réponse sans démonstration ne rapporte pas de point.

On rappelle que si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et $\overline{z}$ désigne le module de z :

1. Si $z = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z+\overline{z}=0$, alors $z=0$.
3. Si $z+\dfrac{1}{z}=0$, alors $z=\mathrm{i}$ ou $z=-\mathrm{i}$.
4. Si $|z|=1$ et si $|z+z'|=1$, alors $z'=0$.

Exercice 3122

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $\big(O\,;I\,;J\big)$ *(unité graphique : 2 cm)*. A tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :
$$z_1 = -1 \quad ; \quad z_2 = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_3 = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}.$$
   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes ${z_1}^3$, ${z_2}^3$, ${z_3}^3$ des nombres complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de ${z_1}^3$, de ${z_2}^3$, de ${z_3}^3$.
2. a. Si $z=x+\mathrm{i}\cdot y=\rho\cdot e^{i\theta}$ est un nombre complexe *(avec y et θ réels et ρ réels supérieur à zéro)*, déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et de y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.
   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.
   c. Déterminer et tracer l'ensemble (E') des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.

2. Géométrie sans les propriétés de l'argument :

Exercice 5430

Le plan complexe est muni d'un repère $\big(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\big)$ orthonormé direct.

On note i le nombre complexe tel que : $\mathrm{i}^2=-1$.

Soit A le point d'affixe $z_A=1$ et B le point d'affixe $z_B=\mathrm{i}$.

A tout point M d'affixe $z_M=x+\mathrm{i}y$, avec x et y deux réels tels que $y\neq 0$, on associe le point M' d'affixe :
$z_{M'} = -\mathrm{i}\cdot z_M$

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartient pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' *(propriété 1)* et que

$BM'=2\cdot OI$ *(propriété 2)*.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend : $z_M=2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

   b. Montrer que $z_{M'}=-\sqrt{3}-i$. Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

   c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ en prenant $2\,cm$ pour unité graphique.
   Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M=x+iy$ avec $y\neq 0$.

   a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

   b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

   c. Ecrire les coordonnées des points I, B et M'.

   d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

   e. Montrer que : $BM'=2\cdot OI$.

Exercice 6262

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. On prendra comme unité $2\,cm$ sur chaque axe.
Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe :
$f(z)=z^2+2\cdot z+9$

1. Calculer l'image de $-1+i\cdot\sqrt{3}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z)=5$.
   Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

   Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation *(A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive)*.
   On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z)=\lambda$ d'inconnue z.
   Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z)=\lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|f(z)-8|=3$

   Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1\,;0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.
   Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z=x+i\cdot y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est :
   $\left(x^2-y^2+2\cdot x+9\right)+i\cdot\left(2\cdot x\cdot y+2\cdot y\right)$.

   b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel.
   Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.
   Compléter le graphique de l'annexe en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

Exercice 6778

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
On considère le point A d'affixe 4, le point d'affixe $4\cdot i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non-nul n, on appelle M_n le point d'affixe : $z_n=\left(1+i\right)^n$.

1. Ecrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n\geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

Exercice 6779

On munit le plan complexe d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que : $\left|z-2\right|=1$

1. Justifier que $\mathscr{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=a\cdot x$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs de a.

Exercice 6777

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$.

On donne le nombre complexe : $j=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. a. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :
   $z^2+z+1=0$

   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

   a. $j^3=1$ b. $j^2=-1-j$

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité :

$a+j\cdot b+j^2\cdot c=0$

On nota A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question **A** 3. b., démontrer l'égalité :

$a-c=j\cdot(c-b)$

2. En déduire que : $AC=BC$

3. Démontrer l'égalité : $a-b=j^2\cdot(b-c)$

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

3. *Géométrie avec argument :*

Exercice 3852

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,5 *point ; une réponse inexacte enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse est comptée* 0 *point. Sit le total est négatif, la note est ramenée à zéro.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé dorect d'origine O.

1. Une solution de l'équation $2\cdot z+\overline{z}=9+\mathrm{i}$ est :

   a. 3 b. i c. $3+\mathrm{i}$

2. Soit z un nombre complexe ; $|z+\mathrm{i}|$ est égal à :

   a. $|z|+1$ b. $|z-1|$ c. $|\mathrm{i}\cdot\overline{z}+1|$

3. Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ. Un argument de $\dfrac{-1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}}{\overline{z}}$ est :

   a. $-\dfrac{\pi}{3}+\theta$ b. $\dfrac{2\pi}{3}+\theta$ c. $\dfrac{2\pi}{3}-\theta$

4. Soit n un entier naturel. Le complexe $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

   a. $n=3$

   b. $n=6\cdot k+3$, avec k relatif

   c. $n=6k$ avec k relatif

5. Soit A et B deux points d'affixe respective i et -1. L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z-\mathrm{i}|=|z+1|$ est :

   a. La droite (AB)

   b. Le cercle de diamètre $[AB]$

   c. La droite perpendiculaire à (AB) passant par O.

6. Soit Ω le point d'affixe $1-\mathrm{i}$. L'ensemble des points M d'affixe $z=x+\mathrm{i}\cdot y$ vérifiant $|z-1+\mathrm{i}|=|3-4\cdot\mathrm{i}|$ a pour équation :

   a. $y=-x+1$

   b. $(x-1)^2+y^2=\sqrt{5}$

   c. $z=1-\mathrm{i}+5\cdot e^{i\cdot\theta}$

7. Soient A et B les points d'affixes respectives 4 et $3\cdot\mathrm{i}$. L'affixe du point C tel que le triangle ABC soit isocèle avec $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ est :

   a. $1-4\cdot\mathrm{i}$ b. $-3\cdot\mathrm{i}$ c. $7+4\cdot\mathrm{i}$

8. L'ensemble des solutions dans $\mathscr{C}$ de l'équation $\dfrac{z-2}{z-1}=z$ est :

   a. $\{1-\mathrm{i}\}$ b. L'ensemble vide. c. $\{1-\mathrm{i}\ ;\ 1+\mathrm{i}\}$

Exercice 6085

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. Soit $A(1\,;0)$ et $B(-1\,;0)$.

A tout point M d'affixe $z\neq 0$, on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z\times z'=1$

1. a. Construire M' quand : $z=2(1+\mathrm{i})$

   b. Dans le cas général, monter que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}\,;\overrightarrow{OM'}\right)$ et que :

   $OM\times OM'=OA^2$.

2. a. Vérifier que :

   $\forall z\in\mathbb{C}^*,\quad \left(\dfrac{z+z'}{2}-1\right)\left(\dfrac{z+z'}{2}+1\right)=\left(\dfrac{z-z'}{2}\right)^2$

   b. Soit I le milieu de $[MM']$. En utilisant a. montrer que :

   $IA\times IB=IM^2$

   et que pour $M\neq A$ et $M\neq B$ la droite (MM') est bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{IA}\,;\overrightarrow{IB}\right)$

Exercice 3857

Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ orthonormal direct d'unité graphique : $4\,cm$.

On considère le point A d'affixe $z_A=2+\mathrm{i}$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $\left(O\,;\vec{u}\right)$.

   b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B=1$ et $z_C=3$. Déterminer l'affixe z_D du point D diamétrialement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3. Soit M le point d'affixe $\dfrac{3}{5}+\dfrac{6}{5}\cdot\mathrm{i}$

   a. Calculer le nombre complexe : $\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$.

   b. Interpréter géométriquement l'argument du nombre

$\dfrac{z_D-z_M}{z_B-z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

   a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

   b. Déterminer l'affixe du point N.

5. On désigne par M' l'image du nombre complexe z' vérifiant la relation :
$$\frac{z'-z_B}{z_M-z_B}=-\mathrm{i}$$

   a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe z'.

   b. Quelle est la nature du triangle $MM'B$?

   c. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ').

4. Suites de complexes :

Exercice 6045

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :
$$z_0=1 \quad ; \quad z_{n+1}=\Big(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}\Big)\cdot z_n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$
On définit la suite (r_n) par :
$r_n=|z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe : $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\mathrm{i}$.

2. a. Montrer que (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n.

   c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère la fonction `f` d'un algorithme suivant :

```
Fonction f(p)
    r ← 1
    n ← 0
    Tant que r>p
        n ← n+1
        r ← √3/2 R
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

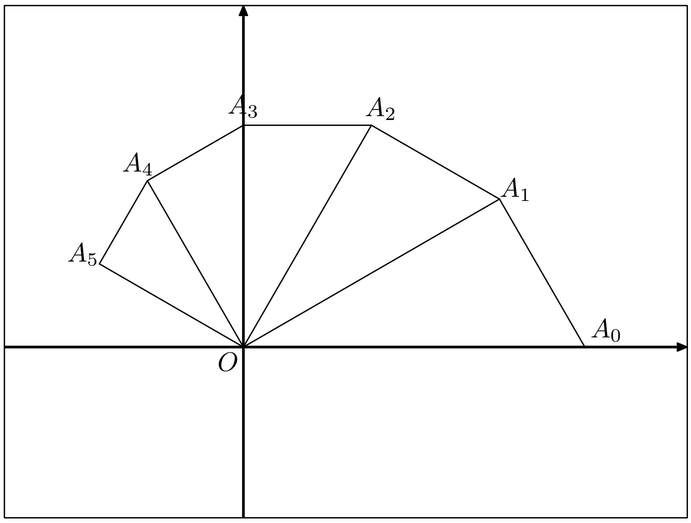
   a. Quelle est la valeur renvoyée par l'appel à la fonction `f` avec la valeur 0,5 pour l'argument `p`?

   b. Pour `p`$=0{,}01$, on obtient `n`$=33$. Quel est le rôle de cette fonction?

4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   b. On admet que : $z_n=r_n\cdot e^{\mathrm{i}\cdot\frac{n\pi}{6}}$
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

   c. Compléter la figure donnée ci-dessous en représentant les points A_6, A_7, A_8 et A_9.
   Les traits de construction seront apparents.



Exercice 6904

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\times z_n+5 \end{cases}$$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n. On considère le nombre complexe $z_A=4+2\cdot\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n=z_n-z_A$.

   a. Montrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\times u_n$$

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $$u_n=\Big(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{i}\Big)^n\cdot(-4-2\cdot\mathrm{i})$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Exercice 3170

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0=2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z_n$.
On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre

réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n :
$$u_n = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3. A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1?

4. a. Etablir que, pour tout entier naturel n :
$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \text{i}.$$
En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

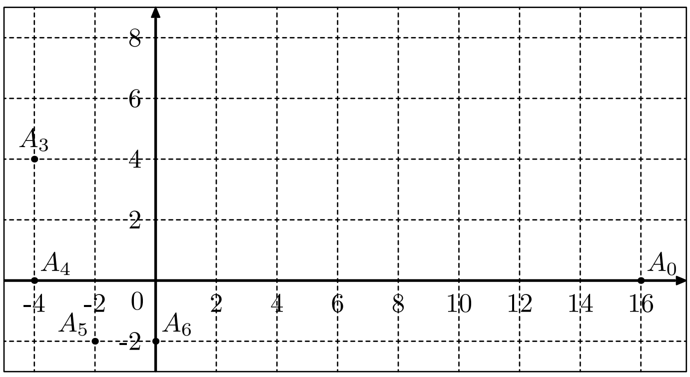
b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n)?

Exercice 6255

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :
$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2}\cdot z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$
On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. a. Calculer z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique donné ci-dessous.



c. Ecrire le nombre complexe $\dfrac{1+\text{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
La suite (r_n) est-elle convergente?
Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note I_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3...

Ainsi : $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n$

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n :
$$A_nA_{n+1} = r_{n+1}$$

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Exercice 6349

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation :
$$(E) : \quad z^2 - 2\cdot z\cdot\sqrt{3} + 4 = 0$$

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes définie pour $n \geqslant 1$ par : $z_n = 2^n\cdot e^{\text{i}\cdot(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}}$.

a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b. Ecrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$z_n = 2^n\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n\cdot\text{i}}{2}\right).$$

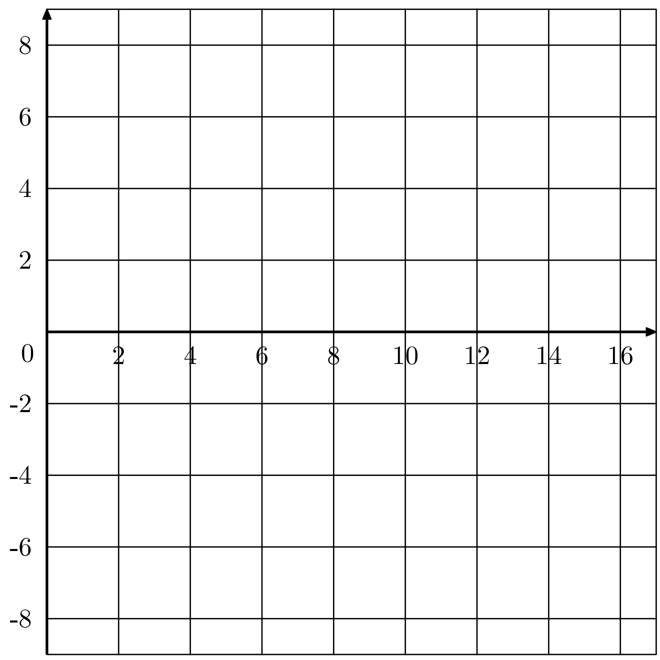
4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M_nM_{n+1} = 2^n\cdot\sqrt{3}$.

5. On note $\ell_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \cdots + M_nM_{n+1}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$\ell_n = 2\sqrt{3}\cdot\left(2^n - 1\right).$$

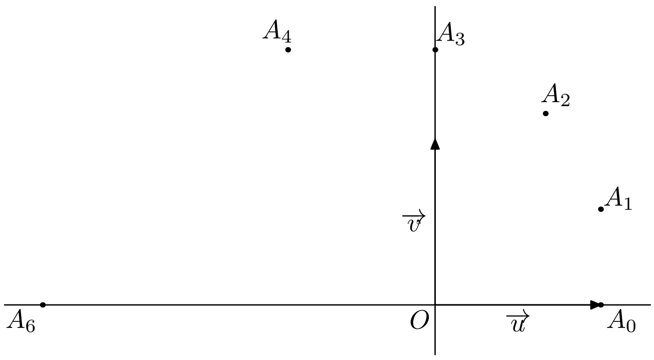
b. Déterminer la plus petit entier n tel que : $\ell_n \geqslant 1000$.



Exercice 6937

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par :
$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(1 + \text{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot z_n$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé donné ci-dessous :



L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que : $1+\mathrm{i}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$z_n=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\cdot e^{\mathrm{i}\cdot n\cdot\frac{\pi}{6}}$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés?

3. Pour tout entier naturel n, on pose : $d_n=|z_{n+1}-z_n|$.

   a. Interpréter géométriquement d_n.

   b. Calculer d_0.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $$z_{n+2}-z_{n+1}=\left(1+\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(z_{n+1}-z_n\right).$$

   d. En déduire que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier naturel n :
   $$d_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
   $$|z_{n+1}|^2=|z_n|^2+{d_n}^2$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_n.

   c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure ci-dessus.

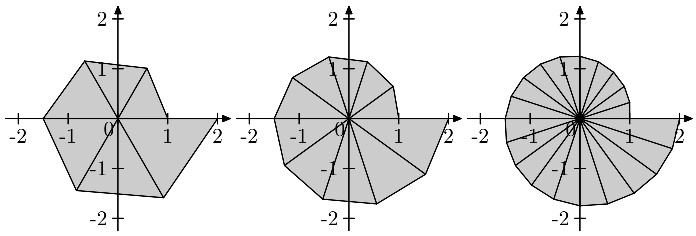
   d. Justifier cette construction.

Exercice 6941

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimité par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes :
$$z_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$$
et on note M_k le point d'affixe z_k.

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0\leqslant k\leqslant n$.
Par exemple, pour les entiers $n=6$, $n=10$ et $n=20$, on obtient les figures ci-dessous :



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n=6$. Ainsi, pour $0\leqslant k\leqslant 6$, on a : $z_k=\left(1+\dfrac{k}{6}\right)\cdot e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}}$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.

2. Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3. Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\dfrac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier k tel que $0\leqslant k\leqslant n$, déterminer la longueur OM_k.

2. Pour k entier tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.
   En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

3. Pour k entier tel que $0\leqslant k\leqslant n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\dfrac{k+1}{n}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

4. On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à :
   $$a_k=\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$
   et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à : $A_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$

   On considère la fonction `f` d'un algorithme donnée ci-dessous, prenant pour argument un entier n et renvoyant la valeur de la variable `A` correspondant à l'aire A_n correspondant au rang n :

```
Fonction f(n)
    A ← 0
    Pour k allant de 0 à n−1
        A ← A+1/2 sin(2π/n)(1+k/n)(1+(k+1)/n)
    Fin Pour
    Renvoyer A
```

   On appelle la fonction `f` avec la valeur 10 pour l'argument `n`.
   Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui recueille toutes les valeurs prises les variables `k` et `A` lors de l'appel à la fonction `f`.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que $A_2=0$ et que la suite (A_n) converge et que : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}A_n=\frac{7\pi}{3}\approx 7{,}3$

Recopier et compléter la lignes $\ell.3$ afin qu'à la fin de son exécution, la valeur de la variable `n` représentant le plus petit entier n tel que $A_n \geqslant 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n

```
ℓ.1    n ← 2
ℓ.2    1 ← 0
ℓ.3    Tant que ...
ℓ.4        n ← n+1
ℓ.5        A ← 0
ℓ.6        Pour k allant de 0 à n−1
ℓ.7            A ← A+1/2 sin(2π/n)(1+k/n)(1+(k+1)/n)
ℓ.8        Fin Pour
ℓ.9    Fin tant que
```

$$\ell.7 \quad \texttt{A} \leftarrow \texttt{A}+\frac{1}{2}\texttt{sin}\left(\frac{2\pi}{\texttt{n}}\right)\left(1+\frac{\texttt{k}}{\texttt{n}}\right)\left(1+\frac{\texttt{k+1}}{\texttt{n}}\right)$$

