

Terminale S/Annales exponentielles, logarithmes, intégrales

1. Fonctions exponentielles :

Exercice 5844



Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

1. Etude d'une fonction auxiliaire :

- Soit la fonction g dérivable, définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = x^2 \cdot e^x - 1$
 Etudier le sens de variation de la fonction g .
- Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
 Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0,703; 0,704[$.
- Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

2. Etude de la fonction f :

- Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
- On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
 Démontrer que pour tout réel strictement positif :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$
- En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel :

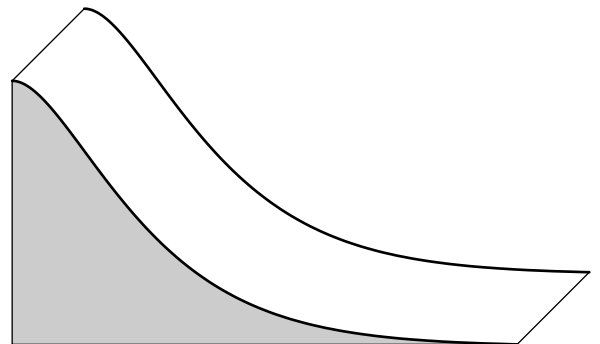
$$m = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a}$$
- Justifier que : $3,43 < m < 3,45$.

Exercice 6934



Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici le schéma :



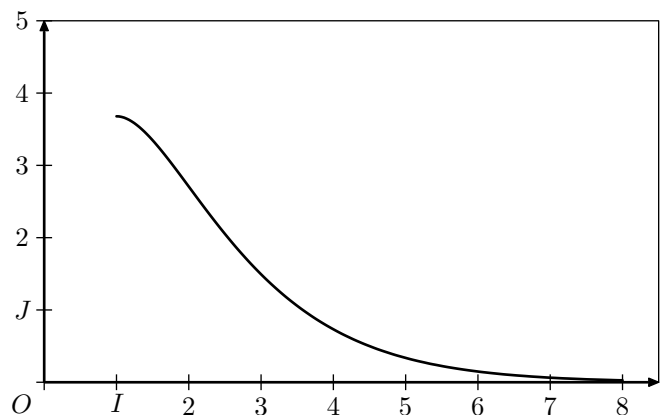
Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe \mathcal{C} représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 8]$ par :

$$f(x) = (a \cdot x + b) \cdot e^{-x}$$

où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe \mathcal{C} est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



- On souhaite que la tangente à la courbe \mathcal{C} en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
 Déterminer la valeur de l'entier b .
- On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
 Déterminer la valeur de l'entier a .

Partie B : Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1; 8]$ par :

$$f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un

artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1; 8]$ par :

$$g(x) = 10 \cdot (-x - 1) \cdot e^{-x}$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g .

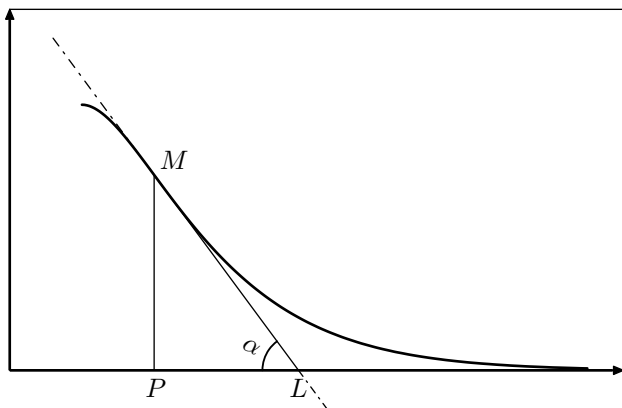
2. Quel est le montant du devis de l'artiste?

Partie C : une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe \mathcal{C} , d'abscisse différent de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à \mathcal{C} à l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1; 8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1; 8]$: $f'(x) = 10 \cdot (1-x) \cdot e^{-x}$
Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1; 8]$.

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1; 8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe \mathcal{C} . Justifier que :

$$\tan \alpha = |f'(x)|$$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées?

Exercice 3121



Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

La fonction d est définie sur $] -1; +\infty[$ par : $d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$

1. Calculer la fonction dérivée d' . En déduire les variations de d .
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.

2. Exponentielles et suites :

Exercice 3158



Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x} \cos(4x)$$

3. Montrer que, pour tout $x > -1$: $0 < d(x) < e$

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}$$

On appelle (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

1. a. Pour $x \in] -1; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

$$\text{Vérier que : } f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$$

En déduire le sens de variations de f' .

- b. Dresser le tableau de variations de f' .

$$\left(\text{On admettra que } \lim_{x \rightarrow -1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1 \right)$$

2. a. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non-nulle.

- b. Donner une valeur approchée de α au centième près.

3. a. Etudier les variations de f .

- b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

- c. Dresser le tableau de variations de f .

Partie C : Prolongement de la fonction f en -1

On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) = 0 \\ g(x) = f(x) \text{ pour tout } x > -1 \end{cases}$$

On appelle (\mathcal{G}) la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. a. Montrer que l'on peut écrire :

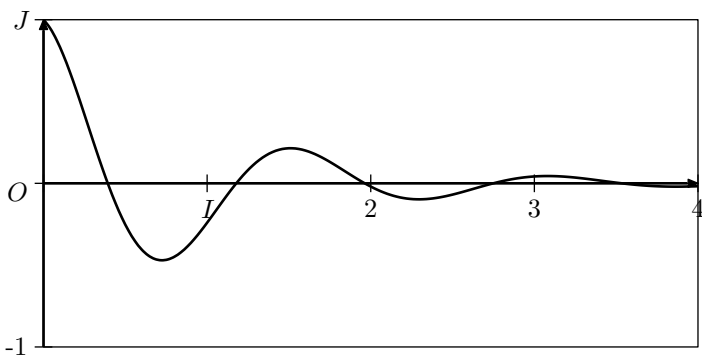
$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}} \right)$$

- b. Pour $x \in] -1; +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$ puis de $\frac{x}{x+1} \cdot e^{\frac{x}{x+1}}$.

- c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et (\mathcal{G}') . Préciser les tangentes à (\mathcal{G}') aux points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$:



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^{-x}$$

et on nomme \mathcal{C} sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$
- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et \mathcal{C} .
3. On définit la suite (u_n) sur \mathbb{N} par : $u_n = f\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.
 - b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.
4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot [\cos(4x) + 4 \cdot \sin(4x)]$$
- b. En déduire que les courbes Γ et \mathcal{C} ont même tangente en chacun de leurs points communs.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite \mathcal{T} tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant \mathcal{T} et \mathcal{C} .

3. Fonctions logarithmiques :

Exercice 3179



1. Restitution organisée des connaissances

Pré-requis :

- La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$;
Sa fonction dérivée est la fonction inverse :

$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs α et x :

$$\ln(\alpha \cdot x) = \ln(\alpha) + \ln(x)$$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

pour tous réels strictement positifs a et b .

3. On donne : $0,69 \leq \ln 2 \leq 0,70$ et $1,09 \leq \ln 3 \leq 1,10$.

En déduire des encadrements de :

$$\ln 6 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{6}\right) \quad ; \quad \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$

Exercice 3898



Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - x \cdot \ln x$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et que :

$$g'(x) = -\ln x$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

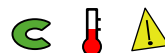
Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{e^n}{n^n}$

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
 - a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
 - b. la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \ln(u_n).$$
 - a. Montrer que : $v_n = n - n \cdot \ln n$.
 - b. En utilisant la partie A, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 5433

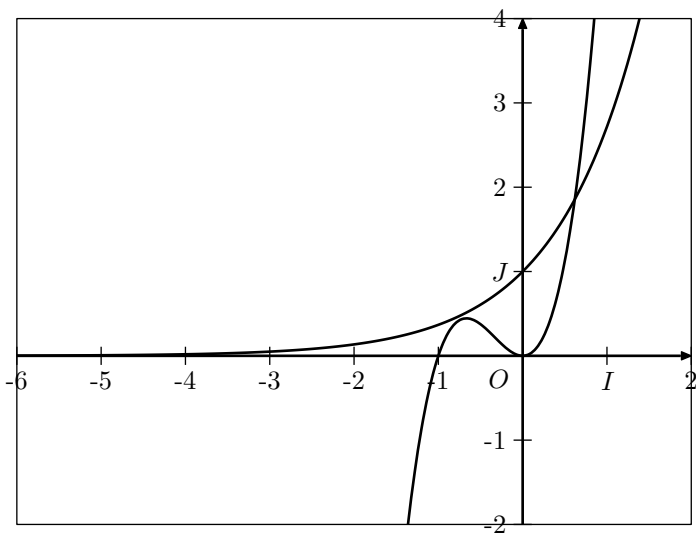


On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$$e^x = 3(x^2 + x^3)$$

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3 \cdot (x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



A l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a. Etudier selon les valeurs de x , le signe de x^2+x^3 .
 b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.
 c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x$$
 Montrer que, sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x)=0$.
3. a. Pour tout réel x appartenant à $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, montrer qu'on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}$$
 b. Déterminer les variations de la fonction h .
 c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$h(x) = 0$$
 et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
 d. Conclure quant à la conjecture de la partie A.

4. Exponentielles et logarithme :

Exercice 3965



1. On considère la fonction f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = 2 \cdot x - 2 + \ln(x^2+1)$$

- a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
- b. Déterminer la dérivée de f_1 .
- c. Dresser le tableau de variations de f_1 .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n , définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = 2 \cdot x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$$

- a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.
- b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

sante sur $[0; +\infty[$.

- c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $[0; +\infty[$.
 - d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n :
 $0 < \alpha_n < 1$
3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :
- $$f_n(\alpha_{n+1}) > 0$$
4. Etude de la suite (α_n) :
- a. Montrer que la suite (α_n) est croissante.
 - b. En déduire qu'elle est convergente.
 - c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2 \cdot n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

5. Un peu plus loin :

Exercice 3266



On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 1 + e^{-x} - 2e^{-2x}$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées)

1. a. Soit le polynôme P défini sur \mathbb{R} par :

$$P(X) = 1 + X - 2X^2.$$

Etudier le signe de $P(X)$.

- b. En déduire le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R} .
 - c. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
3. Vérifier que $f(x) = e^{-2x} \cdot (e^{2x} + e^x - 2)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.
4. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f , calculer

$f'(x)$.

- b. Montrer que $f'(x)$ a le signe que $(4-e^x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
 - c. Dresser le tableau de variations de f . On montrera que le maximum est un nombre rationnel.
5. a. Démontrer que la courbe \mathcal{C} et la droite \mathcal{D}

d'équation $y=1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

- b. Etudier la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la droite \mathcal{D} .
6. Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à la courbe \mathcal{C} au point A .
7. Tracer les droites \mathcal{D} et \mathcal{T} , puis la courbe \mathcal{C} .

255. Exercices non-classés :

Exercice 3255



La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

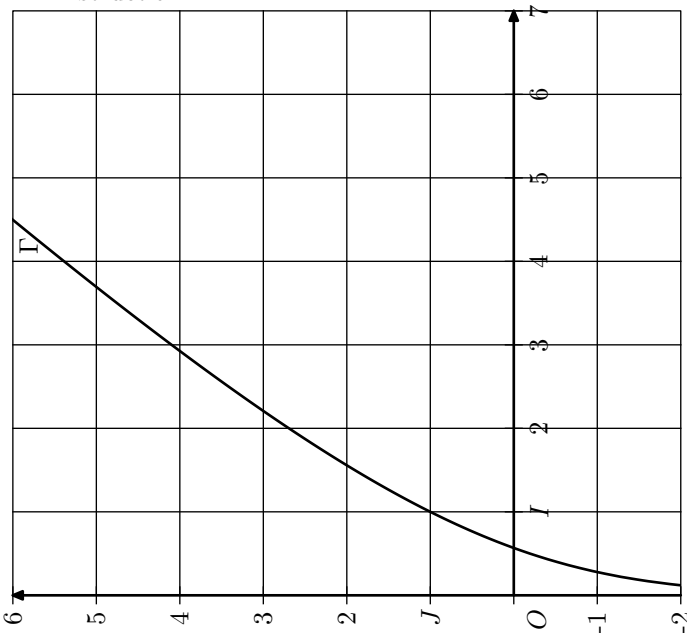
Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan.

- 1. a. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.
 - b. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0; +\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc :
- $$\text{pour tout entier naturel } n, \quad \alpha_n + \ln \alpha_n = n$$
- b. Ci-dessous, on a tracé Γ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Placer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



- c. Préciser la valeur de α_1 .
- d. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

- 3. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse 1.
 - b. Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$h(x) = \ln x - x + 1$$
En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ .
 - c. Tracer Δ sur le graphique ci-dessus. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$$\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n.$$
4. Déterminer la limite de la suite (α_n) .

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et telle que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$$

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur \mathbb{N} une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n) = n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

Prérequis: définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

"Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A "

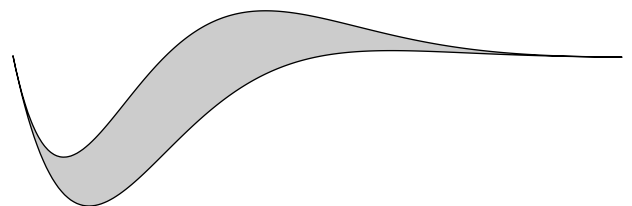
Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$*

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8142



Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} \cdot (-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -e^{-x} \cos x$$

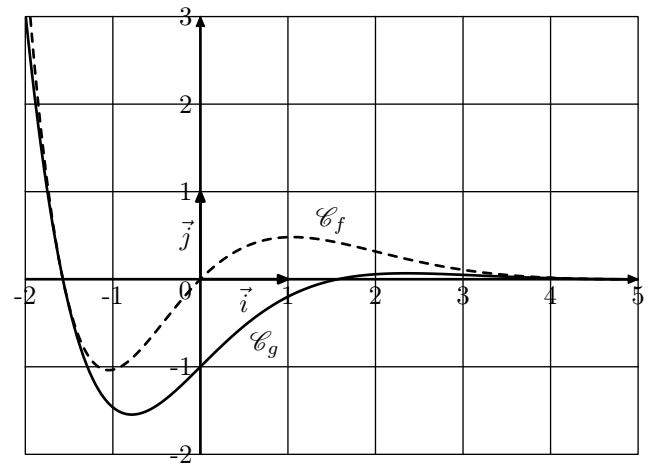
On admet que les fonctions f et g sont dérivables sur \mathbb{R} .

Partie A - Etude de la fonction f

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-e^{-x} \leq f(x) \leq 3e^{-x}$
2. En déduire la limite de f en $+\infty$
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
 $f'(x) = e^{-x}(2 \cos x - 1)$
 où f' est la fonction dérivée de f .
4. Dans cette question, on étudie la fonction f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
 - a. Déterminer le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[-\pi; \pi]$.
 - b. En déduire les variations de f sur $[-\pi; \pi]$.

Partie B - Aire du logo

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. L'unité graphique est de 2 centimètres. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous :



1. Etudier la position relative de la courbe \mathcal{C}_f par rapport à la courbe \mathcal{C}_g sur \mathbb{R} .
2. Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1 \right) \cdot e^{-x}$$
 On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1) \cdot e^{-x}$ sur \mathbb{R} .
 On note \mathcal{D} le domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , la courbe \mathcal{C}_g est les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.
 - a. Hachurer le domaine \mathcal{D} sur le graphique ci-dessus.
 - b. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine \mathcal{D} , puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2 .