Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminale S/Annales exponentielles, logarithmes, intégrales

1. Fonctions exponentielles :

Exercice 5844

Soit f la fonction dérivable et définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}$$

1. **Etude d'une fonction auxiliaire :**

   a. Soit la fonction g dérivale, définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=x^2\cdot\mathrm{e}^x-1$
   Etudier le sens de variation de la fonction g.

   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a)=0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;0{,}704[$.

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. **Etude de la fonction f :**

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   b. On note f' la fonction dérivé de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif :
   $$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

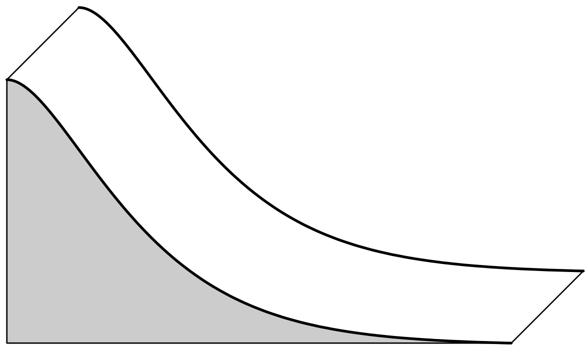
   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel :
   $$m=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$$

   e. Justifier que : $3{,}43<m<3{,}45$.

Exercice 6934

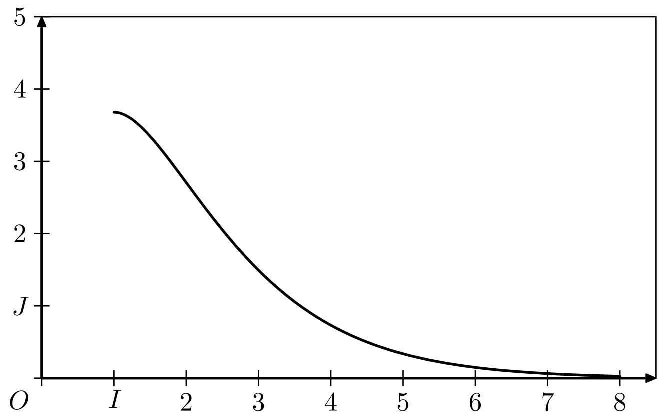
Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.
Voici le schéma :



Partie A : Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par :
$f(x)=(a\cdot x+b)\cdot\mathrm{e}^{-x}$
où a et b sont deux entiers naturels.

La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



1. On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.
   Déterminer la valeur de l'entier b.

2. On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4 mètres de haut.
   Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B : Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x\in[1\,;8]$ par :
$f(x)=10\cdot x\cdot\mathrm{e}^{-x}$

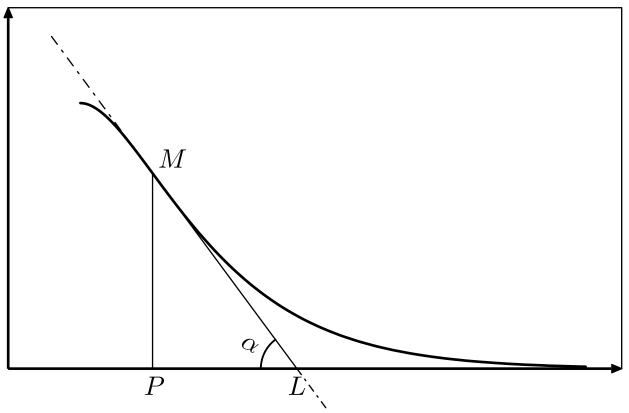
Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;8]$ par :
$g(x)=10\cdot(-x-1)\cdot e^{-x}$
Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

2. Quel est le montant du devis de l'artiste?

Partie C : une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.
On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$, d'abscisse différent de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ à l'axe des abscisses.
La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$: $f'(x)=10\cdot(1-x)\cdot e^{-x}$
Etudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;8]$.

2. Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que :
$\tan\alpha=|f'(x)|$

3. Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées?

Exercice 3121

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire :

La fonction d est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par : $d(x)=e^{\frac{x}{x+1}}$

1. Calculer la fonction dérivée d'. En déduire les variations de d.

2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout $x>-1$: $0<d(x)<e$

Partie B : Etude de la fonction f

Dans cette partie, on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+1-e^{\frac{x}{x+1}}$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, l'unité graphique étant $5\,cm$. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f.

1. a. Pour $x\in]-1\,;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Vérifier que : $f''(x)=\dfrac{2x+1}{(x+1)^4}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}$
En déduire le sens de variations de f'.

   b. Dresser le tableau de variations de f'.
$\left(\textit{On admettra que } \lim\limits_{x\mapsto-1} f'(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x)=1\right)$

2. a. Démontrer que l'équation $f'(x)=0$ admet sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.

Dans la suite du problème, on notera α la solution non-nulle.

   b. Donner une valeur approchée de α au centième près.

3. a. Etudier les variations de f.

   b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

   c. Dresser le tableau de variations de f.

Partie C : Prolongement de la fonction f en -1

On considère la fonction g définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1)=0 \\ g(x)=f(x) \quad \text{pour tout } x>-1 \end{cases}$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. a. Montrer que l'on peut écrire :
$$\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=1-\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}\right)$$

   b. Pour $x\in]-1\,;+\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\dfrac{x}{x+1}$ puis de $\dfrac{x}{x+1}\cdot e^{\frac{x}{x+1}}$.

   c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.

2. Construire (D) et $(\mathscr{C}')$. Préciser les tangentes à $(\mathscr{C}')$ aux points d'abscisses -1, α, 0.

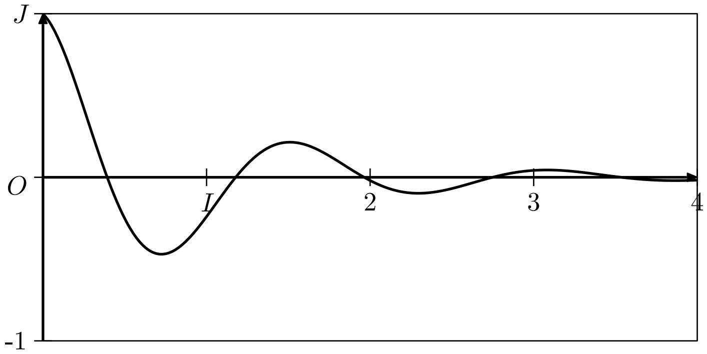
2. Exponentielles et suites :

Exercice 3158

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$. Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=e^{-x}\cos(4x)$

et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$:



On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = \mathrm{e}^{-x}$

et on nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$

   b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et $\mathscr{C}$.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = f\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cdot\left[\cos(4x) + 4\cdot\sin(4x)\right]$

   b. En déduire que les courbes Γ et $\mathscr{C}$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}$.

3. Fonctions logarithmiques :

Exercice 3179

1. **Restitution organisée des connaissances**

Pré-requis :
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
Sa fonction dérivée est la fonction inverse :
$x \longmapsto \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs α et x :

$\ln(\alpha\cdot x) = \ln(\alpha) + \ln(x)$

2. Utiliser le résultat précédent pour démontrer que :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

pour tous réels strictement positifs a et b.

3. On donne : $0{,}69 \leqslant \ln 2 \leqslant 0{,}70$ et $1{,}09 \leqslant \ln 3 \leqslant 1{,}10$.

En déduire des encadrements de :

$$\ln 6 \quad ; \quad \ln\left(\frac{1}{6}\right) \quad ; \quad \ln\left(\frac{3}{8}\right)$$

Exercice 3898

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x - x\cdot\ln x$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et que :
$g'(x) = -\ln x$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{\mathrm{e}^n}{n^n}$

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :

   a. le sens de variation de la suite (u_n) ;

   b. la limite éventuelle de la suite (u_n).

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$v_n = \ln(u_n)$.

   a. Montrer que : $v_n = n - n\cdot\ln n$.

   b. En utilisant la partie **A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

   c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

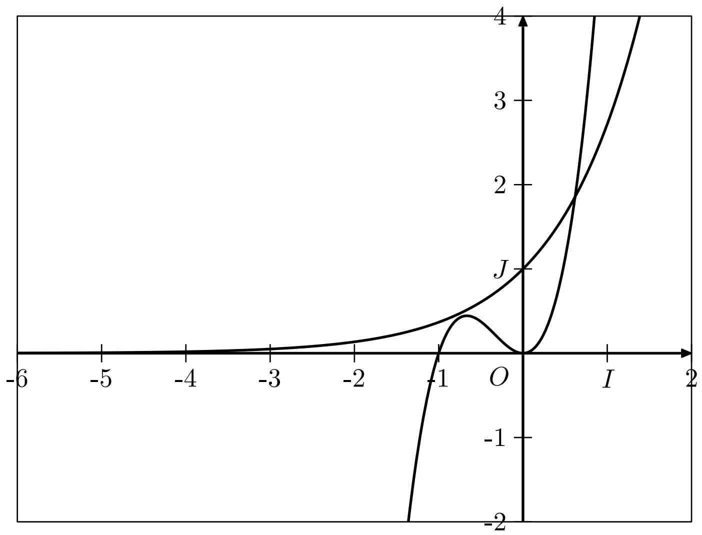
Exercice 5433

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle :

$\mathrm{e}^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$

Partie A : conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cdot\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



A l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1. a. Etudier selon les valeurs de x, le signe de x^2+x^3.

   b. En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$.

   c. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2. On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $\left]-1\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$ par :
   $$h(x) = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x$$
   Montrer que, sur $\left]-1\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$, l'équation (E) équivaut à $h(x)=0$.

3. a. Pour tout réel x appartenant à $\left]-1\,;0\right[\cup\left]0\,;+\infty\right[$, montrer qu'on a :
   $$h'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x(x+1)}$$

   b. Déterminer les variations de la fonction h.

   c. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :
   $h(x) = 0$
   et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

   d. Conclure quant à la conjecture de la partie **A**.

4. Exponentielles et logarithme :

Exercice 3965

1. On considère la fonction f_1 définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $$f_1(x) = 2{\cdot}x - 2 + \ln\left(x^2+1\right)$$

   a. Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

   b. Déterminer la dérivée de f_1.

   c. Dresser le tableau de variations de f_1.

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n, définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par :
   $$f_n(x) = 2{\cdot}x - 2 + \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{n}$$

   a. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

   b. Démontrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

   c. Démontrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

   d. Justifier que, pour tout entier naturel non nul n :
   $0 < \alpha_n < 1$

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul n :
   $f_n\left(\alpha_{n+1}\right) > 0$

4. Etude de la suite $\left(\alpha_n\right)$:

   a. Montrer que la suite $\left(\alpha_n\right)$ est croissante.

   b. En déduire qu'elle est convergente.

   c. Utiliser l'expression $\alpha_n = 1 - \dfrac{\ln\left(\alpha_n^2+1\right)}{2{\cdot}n}$ pour déterminer la limite de cette suite.

5. Un peu plus loin :

Exercice 3266

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-2x}$$
et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. *(unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 8 cm sur l'axe des ordonnées)*

1. a. Soit le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :
   $P(X) = 1 + X - 2X^2$.
   Etudier le signe de $P(X)$.

   b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   c. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$?

3. Vérifier que $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}{\cdot}\left(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{x}-2\right)$, puis déterminer la limite de f en $-\infty$.

4. a. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f, calculer

$f'(x)$.

(b.) Montrer que $f'(x)$ a le signe que $(4-\mathrm{e}^x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

(c.) Dresser le tableau de variations de f. On montrera que le maximum est un nombre rationnel.

5. (a.) Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=1$ n'ont qu'un point d'intersection A dont on déterminera les coordonnées.

(b.) Etudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

6. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

7. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{T}$, puis la courbe $\mathscr{C}$.

255. *Exercices non-classés :*

Exercice 3255

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x + \ln x$

On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ du plan.

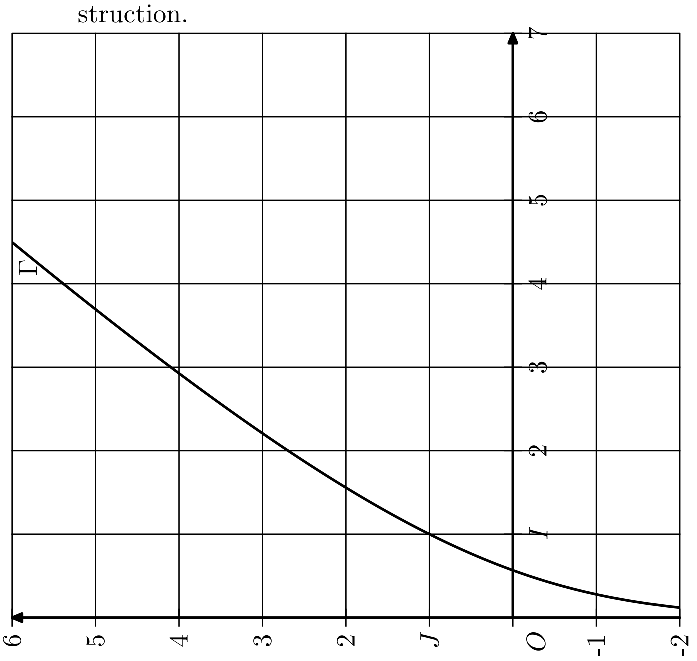
1. (a.) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son intervalle de définition.

(b.) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. (a.) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$.
On note α_n cette solution. On a donc :

pour tout entier naturel n, $\quad \alpha_n+\ln\alpha_n=n$

(b.) Ci-dessous, on a tracé Γ dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



(c.) Préciser la valeur de α_1.

(d.) Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. (a.) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point d'abscisse 1.

(b.) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$h(x) = \ln x - x + 1$

En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

(c.) Tracer Δ sur le graphique ci-dessus. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$\dfrac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).

Partie B

On considère une fonction g continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et telle que :

$\lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = -\infty \quad$ et $\quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} g(x) = +\infty$.

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur $\mathbb{N}$ une suite (β_n) de réels tels que $g(\beta_n)=n$, et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

"Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A"

Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$*

2. Montrer que la suite (β_n) tend vers $+\infty$.

