Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Questions de cours

1. Arithmétique :

Exercice 3373

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :

1. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
Démontrer que :
$$\text{Si} \quad a \equiv b \pmod{7} \quad \text{et} \quad c \equiv d \pmod{7} \quad \text{alors} \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{7}.$$

2. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls. Si $a \equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.

Exercice 3384

Soient a, b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors $a \cdot b$ divise c.

2. Similitudes :

Exercice 3937

On démontrera sans démonstration les deux propriétés suivantes :

- **Propriété 1 :** Toute similitude indirecte qui transforme un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' admet une expression complexe de la forme :
$z' = a \cdot \overline{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.
- **Propriété 2 :** Soit C un point d'affixe c. Pour tout point D, distinct de C, d'affixe d et pour tout point E, distinct de C, d'affixe e, on a :
$$\left(\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CE}\right) = \arg\left(\frac{e-c}{d-c}\right) \ [2 \cdot \pi]$$

Question : Montrer qu'une similitude indirecte transforme un angle orienté en son opposé.

Exercice 3939

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si, et seulement si, f admet une écriture complexe de la forme :
$z' = a \cdot z + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.
Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Exercice 3948

Question de cours :

Prérequis : définitions géométriaues du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que : $q - a = i \cdot (p - a)$.

3. Raisonnement par récurrence :

Exercice 3388

Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.

Exercice 3417

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Pour tout entier naturel n non-nul :

- "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par 5*"?
- "$5^{6n+1}+2^{3n+1}$ *est divisible par 7*"?

255. Exercices non-classés :

Exercice 6248

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des entiers premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers notés p_1, p_2, ..., p_n.
   On considère l'entier E produit de tous les entiers premiers augmenté de 1 :
   $E = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$

   Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des entiers p_1, p_2, ..., p_n.
2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier, conclure.

