

Terminales S - Spécialité/Nombres premiers

1. Propriétés des nombres premiers :

Exercice 3621

- Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
(E) : $a^4 - 5a^3 + 7a^2$
 - Factoriser l'expression (E) comme un produit de deux polynômes du second degré.
 - En déduire l'unique valeur de a afin que l'expression (E) définisse un nombre premier.
- Pour a un entier naturel, on considère l'expression :
(F) : $a^4 - 5a^2$
Justifier que l'entier (F) ne peut être un nombre premier.

Exercice 3622

- Soit n un entier naturel. On considère l'entier A défini par :
 $A = 2^3 \times 3^n \times 5^n$
- Déterminer le nombre de diviseurs de l'entier A dans les cas suivant :
 $n = 0$; $n = 1$; $n = 2$

- Déterminer une expression en fonction de n donnant le nombre de diviseurs de l'entier A .
- Combien de diviseurs admet l'entier 6 075 000?

Exercice 3623

- Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels tels que $a > b$.
- Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
 - Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q .
 - Quelle est la parité de p et de q ?

Exercice 5218

- Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :
- | | | |
|---------|---------|---------|
| a. 8232 | b. 1750 | c. 1053 |
|---------|---------|---------|

2. Nombres premiers et congruence :

Exercice 3619

- Soit p un entier premier supérieur ou égal à 5.
- Justifier que l'entier p vérifie l'une des deux conditions

suivantes :
 $p \equiv 1 \pmod{6}$; $p \equiv 5 \pmod{6}$

- Justifier que l'entier $p^2 - 1$ est divisible par 24.

3. Écriture en base b :

Exercice 3627

- Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
- Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
- On considère l'entier $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base

10 cet entier s'écrit sous la forme :
 $N = a00b$

- On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.
- Vérifier que : $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$
 - En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 5301

On considère l'entier naturel A qui s'écrit $\overline{1x416}$ dans le système de numération de base sept.

1. Déterminer x pour que :
 - a. A soit divisible par six ;
 - b. A soit divisible par cinq.

255. Exercices non-classés :

Exercice 3361

1. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers des entiers suivants :

- a. 2016 b. 2100 c. 864

2. Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme simplifiée :

- a. $\frac{2016}{2100}$ b. $\frac{1}{2100} + \frac{1}{864}$

Exercice 5835

On considère la fonction f ci-dessous, extrait d'un algorithme, où $\text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right)$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$.

```

Fonction f(A)
  N ← 1
  Tant que N ≤ √A
    Si  $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left(\frac{A}{N}\right) = 0$ 
      Alors
        (X ; Y) ←  $\left(N ; \frac{A}{N}\right)$ 
      Fin si
      N ← N+1
  Fin Tant que
  
```

1. En appelant la fonction f avec la valeur 12 pour l'argument A et en lançant l'exécution pas à pas, quelles seront les valeurs affectées au couple $(X ; Y)$ de variables.
2. Que permet d'obtenir l'appel à la fonction f ?

Exercice 3362

Simplifier l'écriture des entiers suivants sous forme de produit de facteurs premiers :

- a. $18 \times 15^2 \times 9 \times 82$ b. $9^2 \times 15^{-2} \times 4^4$ c. $\frac{5 \times 3^4 \times 12^2}{21^2 \times 15^3}$
 d. $\frac{5^2 \times 3^2}{5^5 \cdot (3^4 + 3^4)}$ e. $\frac{2^2 \times 5^{-4}}{2^{21} + 2^{22}}$

Exercice 6771

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

En déduire qu'il existe x tel que A soit divisible par trente.

2. On donne à x la valeur zéro. Déterminer l'écriture décimale de A . Quel est le nombre de diviseurs positifs de A ? Quel est l'ensemble des diviseurs positifs de A qui sont premiers avec trois?

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S(n) \geq 1+n$
- b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1+n$?

Exercice 3363

Préciser si les entiers suivants sont premiers ou non :

- a. 37 b. 127 c. 541 d. $2 \times 3 \times 5 \times 7 + 1$

Exercice 6924

Ci-dessous est donnée une fonction d'un algorithme suivant où $\text{MOD}(N, k)$ représente le reste de la division euclidienne de N par k .

```

Fonction f(a)
  k ← 2
  Tant que  $\text{MOD}(a, k) \neq 0$  et  $k \leq \sqrt{a}$ 
    k ← k+1
  Fin Tant que
  Si  $k > \sqrt{a}$ 
    Alors Renvoyer 0
  Sinon
    Alors Renvoyer 1
  Fin Si
  
```

1. Quelle est la valeur de k lorsque cette fonction est appelé avec pour paramètre $a=127$? Et si on saisis $a=119$?
2. Que peut-on dire de l'entier a passé en paramètre lorsque la valeur renvoyée par la fonction f est 0? Justifier votre réponse.

Exercice 5038

1. Soit n un entier naturel. Exprimer le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4.
2. Soit a et b deux entiers. Etablir la propriété suivante :

“Si $a^2 + b^2$ est un entier divisible par 8 alors a et b sont des entiers pairs”

Exercice 5039

Déterminer l'ensemble des couples $(a ; b)$ d'entiers relatifs vérifiant l'égalité :

$$a^2 - b^2 = 11$$