

Terminales S - Spécialité/Matrices

1. Addition :

Exercice 6809

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. Multiplication :

Exercice 3107

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5072

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5144

On souhaite déterminer l'ensemble des matrices carrées de dimensions 2 vérifiant : $A^2 = I_2$

Pour cela, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et

d sont quatre réels quelconques.

1. a. Exprimer la matrice A^2 en fonction des réels a, b, c et d .

b. Déterminer un système d'équations vérifié par les réels a, b, c et d .

2. Pour étudier ce problème, nous allons effectuer une disjonction de cas :

a. Si $b=0$, exprimer la matrice A en fonction du réel c .

b. Si $b \neq 0$, exprimer la matrice A en fonction des réels a et b .

Exercice 5355

Effectuer les produits suivants de matrices :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Système d'équations :

Exercice 5073

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$


Exercice 5074

Soit a, b et c sont trois nombres réels. Pour chaque question, déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5075

Soit a, b et c sont trois nombres réels. Pour chaque question, Terminales S - Spécialité - Matrices - <http://chingatome.fr> 

déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Commutativité de la multiplication :

Exercice 5076

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que : $A \cdot B = 0$
- Déterminer la matrice produit $B \cdot A$.

Exercice 5078

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer : $A+B$.
- Calculer : $(A+B)^2$
 - Calculer : $A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2$
- Avec le produit matriciel, donner l'expression du développement de $(A+B)^2$.

Exercice 5093

Pour chaque question, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{d. } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 5098

Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n

d'ordre n .

- Développer les expressions suivantes :

$$\text{a. } (2 \cdot A + I_n) \cdot (I_n - A) \quad \text{b. } (A + 2 \cdot I_n)^2$$

- Evaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

$$n=2 ; A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 5099

Soit A et B deux matrices d'ordre n dont le produit est commutatif.

- Développer les expressions suivantes :

$$\text{a. } (A + 2 \cdot B) \cdot (B - A) \quad \text{b. } (2 \cdot A - B)^2$$

- Dans le cas d'ordre 2, évaluer les deux expressions précédentes avec les deux matrices ci-dessous commutative entre elles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 6824

On définit les matrices A , B et M par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que : $M = A + 0,5 \cdot B$
- Vérifier que $A^2 = A$, et que : $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif : $A^n = A$

On admet que, pour tout entier naturel n strictement positif : $B^n = B$.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n : $M^n = A + 0,5^n \cdot B$.

5. Puissances de matrices :

Exercice 5100

Pour chacune des matrices ci-dessous, déterminer l'expression des matrices A^2 et A^3 :

$$\text{a. } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b. } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{c. } A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5082


On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5083 

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Puissances de matrices et congruence :

Exercice 5145 

On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Etablir que : $A^3 = 2 \cdot I_3$.
2. Donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

Exercice 5126 

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 5128 

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

7. Puissances et raisonnement par récurrence :

Exercice 6870  

On considère les matrices M et R définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On définit la suite de matrice (X_n) définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix} ; X_{n+1} = M \cdot X_n + R \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

Etablir, que pour tout entier naturel n : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$


Exercice 5129 

On considère les matrices A , B et C définies par :

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ b. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ c. $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de de la puissance n -ième de chacune de ces matrices pour tout entier naturel n non-nul.

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 5115 

On considère la suite A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$


et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 ; u_{n+1} = u_n + 2^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Etablir que pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera : $A^{n+1} = A \cdot A^n$

Exercice 5127 

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 7364  

On considère la matrice B carré d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$B^n = B^2$$

8. Inverse :

Exercice 5094

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les matrices des produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

Exercice 5095

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B ?

Exercice 5096

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A .

Exercice 5116

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de la matrice $A^2 + A$.
2. En déduire l'expression de la matrice inverse de A .

9. Inverses de matrices d'ordre 2 :

Exercice 5097

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} & \text{b. } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{c. } \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{d. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{e. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} & \text{f. } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 5112

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.

Exercice 5117

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de la matrice $A^2 - 3 \times A$.
2. En déduire l'expression de la matrice inverse de A .

Exercice 6825

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M^2 .

On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que : $M^3 = M^2 + 8 \cdot M + 6 \cdot I_3$
3. En déduire que M est inversible et que :
$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (M^2 - M - 8 \cdot I)$$

Exercice 6871

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer l'expression de la matrice A^2 .
b. Déterminer l'expression de $A^2 - 2 \cdot A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner l'expression de l'inverse de A .

- a. Montrer que le produit $A \cdot B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
- b. Montrer que la matrice $\lambda \cdot A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

2. On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fautive :

$$(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$$

Exercice 6828

Etablir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles

et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

10. Résolution de systèmes :

Exercice 5110

1. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse de la matrice A .

2. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

- Traduire ce système d'équation par une relation matricielle.
- En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 5111

1. On considère les deux matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

11. Avec un logiciel de calcul formel :

Exercice 5113

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

- A l'aide d'un logiciel de calcul matriciel, établir que la matrice A est inversible et donner l'expression de la matrice A^{-1} .
 - A la main, vérifier que : $A \cdot A^{-1} = I_3$
- A l'aide du logiciel de calcul matriciel, résoudre le système d'équations suivant :

12. Matrice diagonalisable :

Exercice 5161

On considère les matrices A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1} .
- Établir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{b. } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{c. } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre les systèmes suivants d'équations :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 2x + z = -8 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 2x + 5y - 6z = -7 \\ -2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$$

Exercice 6869

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

- Effectuer le calcul : $4 \cdot A - A^2$
 - En déduire l'expression de la matrice inverse de la matrice A .
 - Donner l'expression de la matrice : $B = \frac{4}{5} \cdot I_2 - \frac{1}{5} \cdot A$.

2. On considère les deux matrices X et Y définies par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la question 1., résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2 \cdot x + 3 \cdot y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 11 \\ -x + y + 2z = -9 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

Exercice 5114

Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants à l'aide d'un logiciel de calcul matriciel :

$$\text{a. } \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2z = -1 \end{cases} \quad \text{b. } \begin{cases} 2x - 3y + z = -8 \\ -3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} -x - 3y - 2z = -1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - y = -1 \end{cases} \quad \text{d. } \begin{cases} -2x - 3y - 2z = 2 \\ -3x - 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n , on a l'égalité : $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n .

Exercice 5160

On considère les matrices A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1} .

2. a. Etablir l'égalité suivante :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n .

Exercice 5158



On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. On note D la matrice définie par : $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Etablir l'égalité : $A = P \cdot D \cdot Q$

b. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a : $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n .

Exercice 5159



On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité : $A = P \cdot D \cdot Q$

et admettant pour expression :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont trois réels}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$A^n = P \cdot D^n \cdot Q$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n .

Exercice 5146



On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .

Pour cela, on considère les deux matrices carrées P et Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'égalité : $A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Q$

On note D la matrice : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. a. Donner l'expression de la matrice D^n où n est un entier naturel.

b. Etablir pour tout entier naturel n , l'égalité : $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c. Donner l'expression de A^n en fonction de n .

Exercice 5356



On considère les deux matrices de dimensions 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. a. Justifier que la matrice P est une matrice inversible.

b. Donner l'expression de la matrice P^{-1} inverse de la matrice P .

2. Déterminer la valeur des réels α et β réalisant l'égalité suivante :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

b. Donner l'expression de A^n en fonction de n .

13. Matrice diagonalisable et suites :

Exercice 5357

On considère les deux suites réelles (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7 \cdot a_n + 0,6 \cdot b_n \\ b_{n+1} = 0,3 \cdot a_n + 0,4 \cdot b_n \end{cases}$$

Pour tout entier n naturel, on définit la matrice-colonne U_n définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Déterminer la matrice T réalisant pour tout entier naturel n l'égalité suivante : $U_{n+1} = T \cdot U_n$
- On suppose que : $a_0 = \frac{2}{3}$ et $b_0 = \frac{1}{3}$.
 - Déterminer les valeurs de a_1 et b_1 à l'aide de la relation matricielle établie à la question 1.
 - Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?
- On suppose que : $a_0 = 0,3$ et $b_0 = 0,7$.
 - Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a la relation : $U_n = T^n \cdot U_0$
 - A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul forme, déterminer l'expression des matrices U_2 , U_3 et U_5 à 10^{-6} près.
 - Que peut-on conjecturer sur le comportement des suites (a_n) et (b_n) ?

Exercice 5374

Une ville est composée principalement de deux quartiers qu'on note A et B .

Le quartier A est composé de 251 habitants et le quartier B est composé de 386 habitants.

- En choisissant au hasard un habitant dans la ville, quelle est la probabilité que celui-ci vienne du quartier A ? On arrondira les probabilités au millièmes.

On note a_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier A et b_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier B .

La matrice-colonne ligne U_0 définie par $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ représentent

l'état de ces probabilités lors de la première année d'étude de cette ville.

Chaque année, on estime :

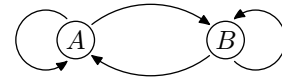
- 5% des habitants du quartier A déménage pour aller dans le quartier B ;
- 12% des habitants du quartier B déménage pour aller dans le quartier A ;

On note a_n (resp. b_n) la probabilité de choisir respectivement un habitant du quartier A (resp. du quartier B) lors de la n -ième année d'étude.

On considère la matrice-colonne U_n définie par : $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

- Recopier et compléter le diagramme ci-dessous afin

de représenter les flux de populations entre ces deux quartiers.



- Ecrire les termes a_{n+1} et b_{n+1} en fonction des valeurs de a_n et b_n .
 - Déterminer la matrice carrée T de dimensions 2 réalisant l'égalité pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = T \cdot U_n$
- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la relation suivante pour tout entier naturel n : $U_n = T^n \cdot U_0$
 - A l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul matriciel, déterminer les matrices-colonnes U_5 , U_{10} et U_{20} dont les coefficients seront arrondis à 10^{-5} .

Exercice 5944

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite de matrice (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On considère la matrice A définie par : $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

- Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $X_{n+1} = A \cdot X_n$
 - Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n : $X_n = A^n \cdot X_0$
- On définit les matrices P et P' :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} ; P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
 - Montrer que les matrices P et P' sont inversibles.
 - Déterminer la matrice B diagonale réalisant l'égalité suivante : $P' \cdot B \cdot P = A$
 - Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $A^n = P' \cdot B^n \cdot P$
- Donner l'expression de la matrice B^n en fonction de n .
 - Etablir que la matrice X_n admet pour expression, pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$
- En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) .

14. Formule du binôme de Newton :

Exercice 5130

On considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer pour tout entier naturel, l'expression des puissances I^n et A^n .
- En déduire l'expression de la matrice $(I+A)^5$.

Exercice 5162

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

- On considère la matrice B définie par $B = A - I_3$. Donner l'expression de B^2 et B^3 .
- Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I_3 + B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = \binom{n}{0} \cdot I_3 + \binom{n}{1} \cdot B + \binom{n}{2} \cdot B^2$$

Exercice 5163

On considère les deux matrices A et D définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n .

- On considère la matrice B définie par $B = A - D$. Donner l'expression de B^2 et B^3 .
- Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(D+B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
 - Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = (-1)^n \cdot \binom{n}{0} \cdot I_3 + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{1} \cdot B + (-1)^{n-2} \cdot \binom{n}{2} \cdot B^2$$

Exercice 5131

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Ecrire la matrice A sous la forme $B+C$ où B est une matrice diagonale carrée.
- Pour tout entier n , donner l'expression de C^n .
 - Vérifier que les matrices B et C sont commutatives.
 - Etablir l'égalité suivante pour tout entier n naturel non-nul :

$$A^n = B^n + n \cdot C \cdot B^n + \binom{n}{2} \cdot C^2 \cdot B^{n-2}$$

15. Formule du binôme de Newton et suites :

Exercice 5164

Considérons la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$; $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Etablir que pour tout entier n , on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

- On considère les deux matrices D et S définies par :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

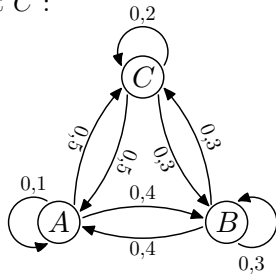
- Montrer que : $D \cdot S = S \cdot D$.
 - Montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $S^k = 0_3$.
 - A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel non-nul.
- En déduire la formule explicite de la suite (u_n) .

16. Matrices de transition :

Exercice 5487



Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A , B et C :



On note a_n, b_n, c_n les probabilités associées à chacun des états à l'étape n .

1. Déterminer une expression de chacun des termes $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ en fonction de a_n, b_n et c_n .

2. On note $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$ la matrice-ligne représentant l'état à l'étape n .

Déterminer la matrice A de transition réalisant l'égalité :

$$U_{n+1} = U_n \cdot A$$

3. On note $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne représentant l'état à l'étape n .

Déterminer la matrice B de transition réalisant l'égalité :

$$V_{n+1} = B \cdot V_n$$

Exercice 5390

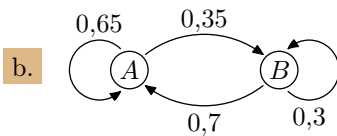
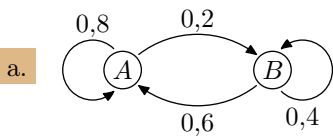


On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B . On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n .

Les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires.

Pour chaque question, déterminer la matrice T de transition

vérifiant la relation : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$



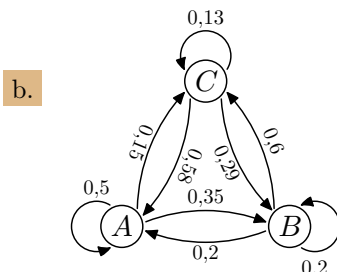
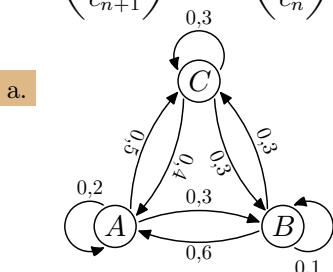
Exercice 5391



On considère un phénomène évolutif entre trois états A , B et C . On note respectivement a_n, b_n et c_n l'effectif associé à ces deux états au rang n .

Pour chaque question, les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires ; déterminer la matrice T de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$



Exercice 5392



On considère un processus évolutif admettant la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. On considère la matrice P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et déterminer l'expression de sa matrice inverse.

b. Déterminer l'existence d'une matrice D diagonale vérifiant l'égalité : $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

c. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :

$$T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

d. En déduire l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n .

2. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) de premiers termes respectifs a_0 et b_0 et vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

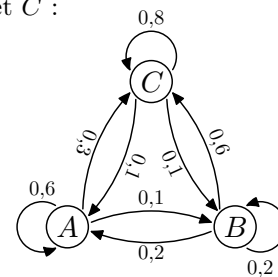
b. Déterminer une expression des termes de ces deux suites en fonction de n, a_0 et b_0

c. En déduire la limite de ces deux suites.

Exercice 5488



Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A , B et C :



On considère la matrice-colonne $U_2 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 2.

1. Donner la matrice de transition A réalisant la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = A \cdot U_n \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur initiale des probabilités.

17. Etat de stabilite :

Exercice 5514



On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n , la matrice colonne X_n définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

2. a. Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donnera l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.
- b. Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
 $X = A \cdot X + B$
- c. Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.
3. On considère la suite (V_n) de matrice-colonne définie par :
 $V_n = X_n - X$
- En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
 $V_n = A^n \cdot V_0$

4. On considère la matrice carrée P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que la matrice P est inversible.
- b. On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n .
- c. En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .
5. On prend comme valeur initiale des suites :
 $x_0 = 1$; $y_0 = 2$
Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

18. Matrices et nombres complexes :

Exercice 5447



On considère la matrice carrée A d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

où i est le nombre complexe vérifiant : $i^2 = -1$.

Exercice 5515



On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,4x_n - 0,6y_n + 0,2 \\ y_{n+1} = 0,9x_n - 0,1y_n + 0,3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n , la matrice colonne X_n définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} ; X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

2. a. Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible, puis donner l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.
- b. Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
 $X = A \cdot X + B$
- c. Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.
3. On considère la suite (V_n) de matrices-colonnes définie par :
 $V_n = X_n - X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
 $V_n = A^n \cdot V_0$

4. On considère la matrice carrée P définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que la matrice P est inversible.
- b. On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n .
- c. En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n .
5. En considérant les valeurs de départ :
 $x_0 = 0,5$; $y_0 = 0,5$
Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

1. Montrer que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.
2. Montrer que la matrice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. On note D cette matrice diagonale dans le reste de l'exercice.
3. a. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :
 $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- b. Justifier que pour tout entier n , on a la relation
 $A^{n+4} = A^n$

255. Exercices non-classés :

Exercice 3745



Déterminer le carré des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6069



On considère les deux matrices A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = k \cdot A \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de k la matrice B vérifie l'égalité :
 $B^2 = B$

Exercice 6100



1. Montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

4. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n , on a :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n & -3 \times (-1)^n \\ 2 \times (-1)^n & 3 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6826



On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.

Vérifier que : $A^2 = A + 2 \cdot I$

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 sous la forme $\alpha \cdot A + \beta \cdot I$ où α et β sont des réels.

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2 \cdot r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = r_n \cdot A + s_n \cdot I$$