

# Terminales S - Spécialité/Matrices

## 1. Addition :

### Exercice réservé 6809

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b.  $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

## 2. Multiplication :

### Exercice réservé 3107

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

### Exercice réservé 5072

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a.  $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Exercice réservé 5144

On souhaite déterminer l'ensemble des matrices carrées de dimensions 2 vérifiant :  $A^2 = I_2$

Pour cela, on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  où  $a, b, c$  et

$d$  sont quatre réels quelconques.

1. a. Exprimer la matrice  $A^2$  en fonction des réels  $a, b, c$  et  $d$ .  
b. Déterminer un système d'équations vérifié par les réels  $a, b, c$  et  $d$ .
2. Pour étudier ce problème, nous allons effectuer une disjonction de cas :  
a. Si  $b=0$ , exprimer la matrice  $A$  en fonction du réel  $c$ .  
b. Si  $b \neq 0$ , exprimer la matrice  $A$  en fonction des réels  $a$  et  $b$ .

### Exercice réservé 5355

Effectuer les produits suivants de matrices :

a.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b.  $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## 3. Système d'équations :

### Exercice réservé 5073

Soit  $a$  et  $b$  deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

a.  $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

### Exercice réservé 5074

Soit  $a, b$  et  $c$  sont trois nombres réels. Pour chaque question, déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice réservé 5075** 

#### 4. Commutativité de la multiplication :

**Exercice réservé 5076** 

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que :  $A \cdot B = 0$
- Déterminer la matrice produit  $B \cdot A$ .

**Exercice réservé 5078** 

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calculer :  $A+B$ .
- Calculer :  $(A+B)^2$
  - Calculer :  $A^2+2 \cdot A \cdot B+B^2$
- Avec le produit matriciel, donner l'expression du développement de  $(A+B)^2$ .

**Exercice réservé 5093** 

Pour chaque question, montrer que le produit des matrices  $A$  et  $B$  est commutatif.

$$a. A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b. A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c. A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**Exercice réservé 5098** 

Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $n$  et la matrice unité  $I_n$  d'ordre  $n$ .

#### 5. Puissances de matrices :

Soit  $a, b$  et  $c$  sont trois nombres réels. Pour chaque question, déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

$$a. \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$b. \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Développer les expressions suivantes :

$$a. (2 \cdot A + I_n) \cdot (I_n - A) \quad b. (A + 2 \cdot I_n)^2$$

- Evaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

$$n=2 ; A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

**Exercice réservé 5099** 

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices d'ordre  $n$  dont le produit est commutatif.

- Développer les expressions suivantes :

$$a. (A + 2 \cdot B) \cdot (B - A) \quad b. (2 \cdot A - B)^2$$

- Dans le cas d'ordre 2, évaluer les deux expressions précédentes avec les deux matrices ci-dessous commutative entre elles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice réservé 6824**  

On définit les matrices  $A, B$  et  $M$  par :

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} ; M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que :  $M = A + 0,5 \cdot B$
- Vérifier que  $A^2 = A$ , et que :  $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  strictement positif :  $A^n = A$

On admet que, pour tout entier naturel  $n$  strictement positif :

$$B^n = B.$$

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$M^n = A + 0,5^n \cdot B.$$

**Exercice réservé 5100** 

Pour chacune des matrices ci-dessous, déterminer l'expression des matrices  $A^2$  et  $A^3$  :

a.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$     b.  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$     c.  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice réservé 5082** 

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice réservé 5083** 

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout entier naturel  $n$  :  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice réservé 5129** 

On considère les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  définies par :

a.  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$     b.  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$     c.  $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de la puissance  $n$ -ième de chacune de ces matrices pour tout entier naturel  $n$  non-nul.

**6. Puissances de matrices et congruence :****Exercice réservé 5145** 

On considère la matrice  $A$  carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- Etablir que :  $A^3 = 2 \cdot I_3$ .
- Donner une expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

**Exercice réservé 5126** 

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$  non-nul.

**Exercice réservé 5128** 

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$  non-nul.

**Exercice réservé 5115** 

On considère la suite  $A$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 2^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Etablir que pour tout entier naturel  $n$  non-nul, on a l'égalité :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera :  $A^{n+1} = A \cdot A^n$

**Exercice réservé 5127** 

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$  non-nul.

**7. Puissances et raisonnement par récurrence :****Exercice réservé 6870**  

On considère les matrices  $M$  et  $R$  définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix} \quad ; \quad R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On définit la suite de matrice  $(X_n)$  définie par :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1100 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_{n+1} = M \cdot X_n + R \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$$

**Exercice réservé 7364**

On considère la matrice  $B$  carré d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

**8. Inverse :****Exercice réservé 5094**

On considère les deux matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les matrices des produits  $A \cdot B$  et  $B \cdot A$ .
- Que peut-on dire des matrices  $A$  et  $B$ ?

**Exercice réservé 5095**

On considère les deux matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les produits  $A \cdot B$  et  $B \cdot A$ .
- Que peut-on dire des matrices  $A$  et  $B$ ?

**Exercice réservé 5096**

On considère les deux matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les produits  $A \cdot B$  et  $B \cdot A$ .
- En déduire la matrice inverse de la matrice  $A$ .

**Exercice réservé 5116**

On considère la matrice carrée  $A$  d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'expression de la matrice  $A^2 + A$ .
- En déduire l'expression de la matrice inverse de  $A$ .

**9. Inverses de matrices d'ordre 2 :**

Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, la relation :

$$B^n = B^2$$

**Exercice réservé 5117**

On considère la matrice carrée  $A$  d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'expression de la matrice  $A^2 - 3 \times A$ .
- En déduire l'expression de la matrice inverse de  $A$ .

**Exercice réservé 6825**

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer la matrice  $M^2$ .

On donne : 
$$M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que :  $M^3 = M^2 + 8 \cdot M + 6 \cdot I_3$
- En déduire que  $M$  est inversible et que : 
$$M^{-1} = \frac{1}{6} \cdot (M^2 - M - 8 \cdot I)$$

**Exercice réservé 6871**

On considère la matrice carrée  $A$  d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer l'expression de la matrice  $A^2$ .
  - Déterminer l'expression de  $A^2 - 2 \cdot A$ .
- En déduire que la matrice  $A$  est inversible et donner l'expression de l'inverse de  $A$ .

**Exercice réservé 5097** 

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

a.  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$     b.  $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$     c.  $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$   
 d.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$     e.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$     f.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

**Exercice réservé 5112** 

1. Soit  $n$  un entier naturel non-nul. On considère  $A$  et  $B$  deux matrices carrées d'ordre  $n$  inversible et  $\lambda$  un nombre réel non-nul.

a. Montrer que le produit  $A \cdot B$  est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

**10. Résolution de systèmes :****Exercice réservé 5110** 

1. On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'inverse de la matrice  $A$ .

2. On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

a. Traduire ce système d'équation par une relation matricielle.

b. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

**Exercice réservé 5111** 

1. On considère les deux matrices suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.

**11. Avec un logiciel de calcul formel :****Exercice réservé 5113** 

On considère la matrice carrée  $A$  d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. a. A l'aide d'un logiciel de calcul matriciel, établir que la matrice  $A$  est inversible et donner l'expression de la matrice  $A^{-1}$ .

b. Montrer que la matrice  $\lambda \cdot A$  est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.

2. On considère les deux matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que la relation suivante est fautive :  
 $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

**Exercice réservé 6828** 

Etablir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

a.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$     b.  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$     c.  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Résoudre les systèmes suivants d'équations :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 2x + z = -8 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 2x + 5y - 6z = -7 \\ -2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$$

**Exercice réservé 6869** 

On considère la matrice  $A$  définie par :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

1. a. Effectuer le calcul :  $4 \cdot A - A^2$

b. En déduire l'expression de la matrice inverse de la matrice  $A$ .

c. Donner l'expression de la matrice :  $B = \frac{4}{5} \cdot I_2 - \frac{1}{5} \cdot A$ .

2. On considère les deux matrices  $X$  et  $Y$  définies par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En utilisant la question 1., résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ -2 \cdot x + 3 \cdot y = 1 \end{cases}$$

b. A la main, vérifier que :  $A \cdot A^{-1} = I_3$

2. A l'aide du logiciel de calcul matriciel, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 11 \\ -x + y + 2z = -9 \\ 2y - z = -3 \end{cases}$$

**Exercice réservé 5114** 

Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants à l'aide d'un logiciel de calcul matriciel :

$$\begin{array}{ll} \text{a.} \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = -2 \\ -2x + 3y + 2y = -1 \end{cases} & \text{b.} \begin{cases} 2x - 3y + z = -8 \\ -3x + 2y - 3z = 3 \\ x - y + z = -1 \end{cases} \\ \text{c.} \begin{cases} -x - 3y - 2z = -1 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - y = -1 \end{cases} & \text{d.} \begin{cases} -2x - 3y - 2z = 2 \\ -3x - 3y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{cases} \end{array}$$

## 12. Matrice diagonalisable :

### Exercice réservé 5161

On considère les matrices  $A$  et  $P$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice  $P$  est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice  $P^{-1}$ .

2. a. Etablir l'existence d'une matrice  $D$  vérifiant l'égalité :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

c. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non-nul, l'expression de  $A^n$ .

### Exercice réservé 5160

On considère les matrices  $A$  et  $P$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice  $P$  est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice  $P^{-1}$ .

2. a. Etablir l'égalité suivante :

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$$

b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non-nul, l'expression de  $A^n$ .

### Exercice réservé 5158

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices  $P$  et  $Q$  définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices  $P$  et  $Q$  sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. On note  $D$  la matrice définie par :  $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Etablir l'égalité :  $A = P \cdot D \cdot Q$

b. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  
 $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

c. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non-nul, l'expression de la matrice  $A^n$ .

### Exercice réservé 5159

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices  $P$  et  $Q$  définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices  $P$  et  $Q$  sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'existence d'une matrice  $D$  vérifiant l'égalité :  
 $A = P \cdot D \cdot Q$

et admettant pour expression :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont trois réels}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel  $n$ , on a l'égalité :  
 $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$

b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$  non-nul, l'expression de la matrice  $A^n$ .

### Exercice réservé 5146

On considère la matrice  $A$  carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

Pour cela, on considère les deux matrices carrées  $P$  et  $Q$  :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} ; Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices  $P$  et  $Q$  sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'égalité :  $A = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot Q$

On note  $D$  la matrice :  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. a. Donner l'expression de la matrice  $D^n$  où  $n$  est un entier naturel.  
 b. Etablir pour tout entier naturel  $n$ , l'égalité :  $A^n = P \cdot D^n \cdot Q$   
 c. Donner l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice réservé 5356** 

**13. Matrice diagonalisable et suites :**

**Exercice réservé 5357** 

On considère les deux suites réelles  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0,7 \cdot a_n + 0,6 \cdot b_n \\ b_{n+1} = 0,3 \cdot a_n + 0,4 \cdot b_n \end{cases}$$

Pour tout entier  $n$  naturel, on définit la matrice-colonne  $U_n$  définie par :

$$U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice  $T$  réalisant pour tout entier naturel  $n$  l'égalité suivante :  $U_{n+1} = T \cdot U_n$   
 2. On suppose que :  $a_0 = \frac{2}{3}$  et  $b_0 = \frac{1}{3}$ .  
 a. Déterminer les valeurs de  $a_1$  et  $b_1$  à l'aide de la relation matricielle établie à la question 1.  
 b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ?  
 3. On suppose que :  $a_0 = 0,3$  et  $b_0 = 0,7$ .

- a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a la relation :  $U_n = T^n \cdot U_0$   
 b. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'expression des matrices  $U_2, U_3$  et  $U_5$  à  $10^{-6}$  près.  
 c. Que peut-on conjecturer sur le comportement des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ?

**Exercice réservé 5374** 

Une ville est composée principalement de deux quartiers qu'on note  $A$  et  $B$ .

Le quartier  $A$  est composé de 251 habitants et le quartier  $B$  est composé de 386 habitants.

On considère les deux matrices de dimensions 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. a. Justifier que la matrice  $P$  est une matrice inversible.  
 b. Donner l'expression de la matrice  $P^{-1}$  inverse de la matrice  $P$ .  
 2. Déterminer la valeur des réels  $\alpha$  et  $\beta$  réalisant l'égalité suivante :  $A = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$   
 3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  :  $A^n = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$   
 b. Donner l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

1. En choisissant au hasard un habitant dans la ville, quelle est la probabilité que celui-ci vienne du quartier  $A$ ? On arrondira les probabilités au millième.

On note  $a_0$  la probabilité de choisir un habitant du quartier  $A$  et  $b_0$  la probabilité de choisir un habitant du quartier  $B$ .

La matrice-colonne ligne  $U_0$  définie par  $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$  représente l'état de ces probabilités lors de la première année d'étude de cette ville.

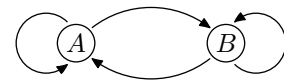
Chaque année, on estime :

- 5% des habitants du quartier  $A$  déménage pour aller dans le quartier  $B$  ;
- 12% des habitants du quartier  $B$  déménage pour aller dans le quartier  $A$  ;

On note  $a_n$  (resp.  $b_n$ ) la probabilité de choisir respectivement un habitant du quartier  $A$  (resp. du quartier  $B$ ) lors de la  $n$ -ième année d'étude.

On considère la matrice-colonne  $U_n$  définie par :  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

2. a. Recopier et compléter le diagramme ci-dessous afin de représenter les flux de populations entre ces deux quartiers.



- b. Ecrire les termes  $a_{n+1}$  et  $b_{n+1}$  en fonction des valeurs de  $a_n$  et  $b_n$ .  
 c. Déterminer la matrice carrée  $T$  de dimensions 2 réalisant l'égalité pour tout entier naturel  $n$  :  $U_{n+1} = T \cdot U_n$   
 3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la relation suivante pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = T^n \cdot U_0$   
 4. A l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul matriciel, déterminer les matrices-colonnes  $U_5, U_{10}$  et  $U_{20}$

dont les coefficients seront arrondis à  $10^{-5}$ .

### Exercice réservé 5944

On définit les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

On définit la suite de matrice  $(X_n)$  par la relation

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $X_{n+1} = A \cdot X_n$
- b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel  $n$  :  $X_n = A^n \cdot X_0$

## 14. Formule du binôme de Newton :

### Exercice réservé 5130

On considère les deux matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer pour tout entier naturel, l'expression des puissances  $I^n$  et  $A^n$ .
2. En déduire l'expression de la matrice  $(I+A)^5$ .

### Exercice réservé 5162

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. On considère la matrice  $B$  définie par  $B = A - I_3$ . Donner l'expression de  $B^2$  et  $B^3$ .
2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression  $(I_3 + B)^n$  pour  $n$  entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
- b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = \binom{n}{0} \cdot I_3 + \binom{n}{1} \cdot B + \binom{n}{2} \cdot B^2$$

### Exercice réservé 5163

On considère les deux matrices  $A$  et  $D$  définie par :

2. On définit les matrices  $P$  et  $P'$  :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} ; P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- a. Montrer que les matrices  $P$  et  $P'$  sont inversibles.
  - b. Déterminer la matrice  $B$  diagonale réalisant l'égalité suivante :  $P' \cdot B \cdot P = A$
  - c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :  $A^n = P' \cdot B^n \cdot P$
3. a. Donner l'expression de la matrice  $B^n$  en fonction de  $n$ .
- b. Etablir que la matrice  $X_n$  admet pour expression, pour tout entier naturel  $n$  :  $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$
4. En déduire les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. On considère la matrice  $B$  définie par  $B = A - D$ . Donner l'expression de  $B^2$  et  $B^3$ .
2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression  $(D+B)^n$  pour  $n$  entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.
- b. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :

$$A^n = (-1)^n \cdot \binom{n}{0} \cdot I_3 + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{1} \cdot B + (-1)^{n-2} \cdot \binom{n}{2} \cdot B^2$$

### Exercice réservé 5131

On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice  $A$  sous la forme  $B+C$  où  $B$  est une matrice diagonale carrée.
2. a. Pour tout entier  $n$ , donner l'expression de  $C^n$ .
- b. Vérifier que les matrices  $B$  et  $C$  sont commutatives.
- c. Etablir l'égalité suivante pour tout entier  $n$  naturel non-nul :

$$A^n = B^n + n \cdot C \cdot B^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot C^2 \cdot B^{n-2}$$



## 15. Formule du binôme de Newton et suites :

### Exercice réservé 5164 C

Considérons la matrice  $A$  carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  
 $u_0 = 0$  ;  $u_{n+1} = 2 \cdot u_n + 3 \times 2^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Etablir que pour tout entier  $n$ , on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. On considère les deux matrices  $D$  et  $S$  définies par :

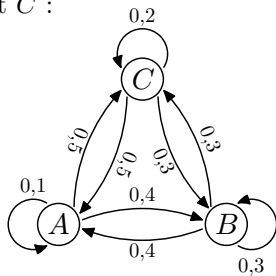
$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a. Montrer que :  $D \cdot S = S \cdot D$ .  
 b. Montrer que pour tout  $k \geq 2$ , on a :  $S^k = 0_3$ .  
 c. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de  $A^n$  pour tout entier naturel non nul.  
 3. En déduire la formule explicite de la suite  $(u_n)$ .

## 16. Matrices de transition :

### Exercice réservé 5487 C

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états  $A$ ,  $B$  et  $C$  :



On note  $a_n, b_n, c_n$  les probabilités associées à chacun des états à l'étape  $n$ .

1. Déterminer une expression de chacun des termes  $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$  en fonction de  $a_n, b_n$  et  $c_n$ .  
 2. On note  $U_n = (a_n \ b_n \ c_n)$  la matrice-ligne représentant l'état à l'étape  $n$ .  
 Déterminer la matrice  $A$  de transition réalisant l'égalité :

$$U_{n+1} = U_n \cdot A$$

3. On note  $V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$  la matrice-colonne représentant l'état à l'étape  $n$ .

Déterminer la matrice  $B$  de transition réalisant l'égalité :

$$V_{n+1} = B \cdot V_n$$

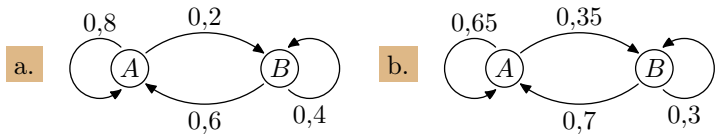
### Exercice réservé 5390 C

On considère un phénomène évolutif entre deux états  $A$  et  $B$ . On note respectivement  $a_n$  et  $b_n$  l'effectif associé à ces deux états au rang  $n$ .

Les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires.

Pour chaque question, déterminer la matrice  $T$  de transition

$$\text{vérifiant la relation : } \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

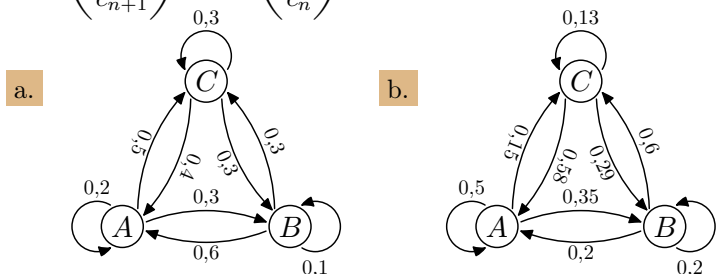


### Exercice réservé 5391 C

On considère un phénomène évolutif entre trois états  $A, B$  et  $C$ . On note respectivement  $a_n, b_n$  et  $c_n$  l'effectif associé à ces deux états au rang  $n$ .

Pour chaque question, les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires ; déterminer la matrice  $T$  de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$



### Exercice réservé 5392 C

On considère un processus évolutif admettant la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 10 & -10 \\ 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On considère la matrice  $P$  définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que la matrice  $P$  est une matrice inversible et déterminer l'expression de sa matrice inverse.
- Déterminer l'existence d'une matrice  $D$  diagonale vérifiant l'égalité :  $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$ .
- Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel  $n$  :  
 $T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- En déduire l'expression de la matrice  $T^n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .

2. On considère les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de premiers termes respectifs  $a_0$  et  $b_0$  et vérifiant la relation :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

b. Déterminer une expression des termes de ces deux

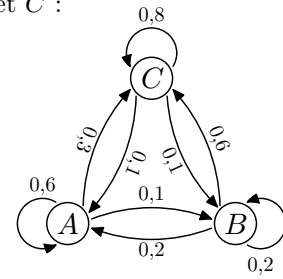
suites en fonction de  $n$ ,  $a_0$  et  $b_0$

c. En déduire la limite de ces deux suites.

### Exercice réservé 5488



Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états  $A$ ,  $B$  et  $C$  :



On considère la matrice-colonne  $U_2 = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}$  représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 2.

- Donner la matrice de transition  $A$  réalisant la relation de récurrence :  
 $U_{n+1} = A \cdot U_n$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$
- Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur initiale des probabilités.

## 17. Etat de stabilité :

### Exercice réservé 5514



On considère les deux suites réelles  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne  $B$  et, pour tout entier  $n$ , la matrice colonne  $X_n$  définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} ; X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée  $A$  de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

- Justifier que la matrice  $I_2 - A$  est inversible. On donnera l'expression de la matrice  $(I_2 - A)^{-1}$ .
  - Déterminer la matrice  $X$  réalisant l'égalité :  
 $X = A \cdot X + B$
  - Si les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3. On considère la suite  $(V_n)$  de matrice-colonne définie par :

$$V_n = X_n - X$$

En déduire que, pour tout entier  $n$  naturel, la relation :

$$V_n = A^n \cdot V_0$$

4. On considère la matrice carrée  $P$  définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Justifier que la matrice  $P$  est inversible.
  - On note  $D$  la matrice définie par :  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ . Donner une expression de la matrice  $D^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - En déduire une expression de la matrice  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
5. On prend comme valeur initiale des suites :  
 $x_0 = 1$  ;  $y_0 = 2$   
Que peut-on dire sur la convergence des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$ ?

### Exercice réservé 5515



On considère les deux suites réelles  $(x_n)$  et  $(y_n)$  dont les termes vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1,4x_n - 0,6y_n + 0,2 \\ y_{n+1} = 0,9x_n - 0,1y_n + 0,3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne  $B$  et, pour tout entier  $n$ , la matrice colonne  $X_n$  définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,3 \end{pmatrix} ; X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice carrée  $A$  de dimension 2 vérifiant la relation :

$$X_{n+1} = A \cdot X_n + B$$

- Justifier que la matrice  $I_2 - A$  est inversible, puis

donner à l'expression de la matrice  $(I_2 - A)^{-1}$ .

- b. Déterminer la matrice  $X$  réalisant l'égalité :  
 $X = A \cdot X + B$
- c. Si les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.
3. On considère la suite  $(V_n)$  de matrices-colones définie par :  
 $V_n = X_n - X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$
- En déduire que, pour tout entier  $n$  naturel, la relation :  
 $V_n = A^n \cdot V_0$

4. On considère la matrice carrée  $P$  définie par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- a. Justifier que la matrice  $P$  est inversible.
- b. On note  $D$  la matrice définie par :  $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ .  
 Donner une expression de la matrice  $D^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
- c. En déduire une expression de la matrice  $A^n$  pour tout entier naturel  $n$ .
5. En considérant les valeurs de départ :  
 $x_0 = 0,5$  ;  $y_0 = 0,5$   
 Que peut-on dire sur la convergence des suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$ ?

## 18. Matrices et nombres complexes :

### Exercice réservé 5447

On considère la matrice carrée  $A$  d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les matrices  $P$  et  $Q$  définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i & -\frac{1}{2} \cdot i \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot i & \frac{1}{2} \cdot i \end{pmatrix}$$

où  $i$  est le nombre complexe vérifiant :  $i^2 = -1$ .

1. Montrer que les matrices  $P$  et  $Q$  sont inverses l'une de l'autre.
2. Montrer que la matrice  $P^{-1} \cdot A \cdot P$  est une matrice diagonale. On note  $D$  cette matrice diagonale dans le reste de l'exercice.
3. a. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel  $n$  :  
 $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
- b. Justifier que pour tout entier  $n$ , on a la relation  
 $A^{n+4} = A^n$

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice réservé 3745

Déterminer le carré des matrices suivantes :

a.  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$       b.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

c.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$       d.  $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

### Exercice réservé 6069

On considère les deux matrices  $A$  et  $B$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = k \cdot A \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de  $k$  la matrice  $B$  vérifie l'égalité :  
 $B^2 = B$

### Exercice réservé 6100

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 4 - 2^{n+2} \\ 3 \times 2^n - 3 & 4 - 3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel non-nul  $n$ , on a :  
 $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$
3. Montrer que pour tout entier naturel non-nul  $n$ , on a :  
 $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$
4. Montrer que pour tout entier naturel non-nul  $n$ , on a :  
 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2 \times (-1)^n & -3 \times (-1)^n \\ 2 \times (-1)^n & 3 \times (-1)^n \end{pmatrix}$

### Exercice réservé 6826

On considère la matrice :  $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle  $I$  la matrice identité d'ordre 2.  
 Vérifier que :  $A^2 = A + 2 \cdot I$
2. En déduire une expression de  $A^3$  et une expression de  $A^4$  sous la forme  $\alpha \cdot A + \beta \cdot I$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels.

3. On considère les suites  $(r_n)$  et  $(s_n)$  définies par  $r_0=0$  et  $s_0=1$  et, pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2 \cdot r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$A^n = r_n \cdot A + s_n \cdot I$$