Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Matrices

1. Addition :

Exercice 6809

Effectuer les additions de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2. Multiplication :

Exercice 3107

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5072

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5144

On souhaite déterminer l'ensemble des matrices carrées de dimensions 2 vérifiant : $A^2 = I_2$

Pour cela, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont quatre réels quelconques.

1. a. Exprimer la matrice A^2 en fonction des réels a, b, c et d.
   b. Déterminer un système d'équations vérifié par les réels a, b, c et d.
2. Pour étudier ce problème, nous allons effectuer une disjonction de cas :
   a. Si $b = 0$, exprimer la matrice A en fonction du réel c.
   b. Si $b \neq 0$, exprimer la matrice A en fonction des réels a et b.

Exercice 5355

Effectuer les produits suivants de matrices :

a. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Système d'équations :

Exercice 5073

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité ci-dessous :

a. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$

Exercice 5074

Soit a, b et c sont trois nombres réels. Pour chaque question, déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

1. $\begin{pmatrix}3&1&4\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}$

Exercice 5075

Soit a, b et c sont trois nombres réels. Pour chaque question, déterminer la valeur de ces réels afin de vérifier l'égalité :

a. $\begin{pmatrix}4&-2&1\\1&2&3\\2&-6&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\7\\-7\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}-1&3&1\\1&0&2\\-1&6&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

4. Commutativité de la multiplication :

Exercice 5076

On considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-4\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}2&6\\1&3\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que : $A\cdot B=0$
2. Déterminer la matrice produit $B\cdot A$.

Exercice 5078

On considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1&6\\-1&2\end{pmatrix}$$

1. Calculer : $A+B$.
2. a. Calculer : $(A+B)^2$

   b. Calculer : $A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$
3. Avec le produit matriciel, donner l'expression du développement de $(A+B)^2$.

Exercice 5093

Pour chaque question, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

a. $A=\begin{pmatrix}-4&-2\\-1&0\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

b. $A=\begin{pmatrix}-4&-2\\2&4\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&2\end{pmatrix}$

c. $A=\begin{pmatrix}-2&-1\\1&3\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-3&-1\\1&2\end{pmatrix}$

d. $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&4\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}$

Exercice 5098

Soit A une matrice carrée d'ordre n et la matrice unité I_n d'ordre n.

1. Développer les expressions suivantes :

   a. $(2\cdot A+I_n)\cdot(I_n-A)$ b. $(A+2\cdot I_n)^2$
2. Evaluer chacune de ces deux expressions dans le cas où :

   $n=2\ ;\ A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&-2\end{pmatrix}$

Exercice 5099

Soit A et B deux matrices d'ordre n dont le produit est commutatif.

1. Développer les expressions suivantes :

   a. $(A+2\cdot B)\cdot(B-A)$ b. $(2\cdot A-B)^2$
2. Dans le cas d'ordre 2, évaluer les deux expressions précédentes avec les deux matrices ci-dessous commutative entre elles :

   $$A=\begin{pmatrix}1&-3\\-1&-1\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}$$

Exercice 6824

On définit les matrices A, B et M par :

$$A=\begin{pmatrix}0{,}8&0{,}8\\0{,}2&0{,}2\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}0{,}2&-0{,}8\\-0{,}2&0{,}8\end{pmatrix}\ ;\ M=\begin{pmatrix}0{,}9&0{,}4\\0{,}1&0{,}6\end{pmatrix}$$

1. Démontrer que : $M=A+0{,}5\cdot B$
2. Vérifier que $A^2=A$, et que : $A\times B=B\times A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
3. Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n strictement positif :
   $A^n=A$

On admet que, pour tout entier naturel n strictement positif :
$B^n=B$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
   $M^n=A+0{,}5^n\cdot B$.

5. Puissances de matrices :

Exercice 5100

Pour chacune des matrices ci-dessous, déterminer l'expression des matrices A^2 et A^3 :

a. $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&1\end{pmatrix}$ b. $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ c. $A=\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$

Exercice 5082

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $A^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

Exercice 5083

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$

Etablir, que pour tout entier naturel n : $A^n=\begin{pmatrix}2^n&0\\2^n-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 5129

On considère les matrices A, B et C définies par :

a. $A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-3\end{pmatrix}$ b. $B=\begin{pmatrix}1&-1\\3&-2\end{pmatrix}$ c. $C=\begin{pmatrix}-3&-1\\3&3\end{pmatrix}$

Déterminer l'expression de de la puissance n-ième de chacune de ces matrices pour tout entier naturel n non-nul.

6. Puissances de matrices et congruence :

Exercice 5145

On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-1&1&-4\\-1&2&-2\end{pmatrix}$$

1. Etablir que : $A^3=2\cdot I_3$.
2. Donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

Exercice 5126

On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1&-4&-4\\-1&1&2\\1&-2&-3\end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 5128

On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-3&1&2\\3&-3&-4\end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

Exercice 5115

On considère la suite A définie par : $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

et la suite (u_n) définie par :

$$u_0=0 \quad ; \quad u_{n+1}=u_n+2^n \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

Etablir que pour tout entier naturel n non-nul, on a l'égalité :

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&u_n\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}$$

Indication : on utilisera : $A^{n+1}=A\cdot A^n$

Exercice 5127

On considère la matrice A définie par :

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\-1&-4&-3\\2&4&3\end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel n non-nul.

7. Puissances et raisonnement par récurrence :

Exercice 6870

On considère les matrices M et R définies par :

$$M=\begin{pmatrix}0{,}9&0{,}15\\0{,}1&0{,}85\end{pmatrix} \quad ; \quad R=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$$

On définit la suite de matrice (X_n) définie par :

$$X_0=\begin{pmatrix}1100\\1100\end{pmatrix} \quad ; \quad X_{n+1}=M\cdot X_n+R \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$X_n=\begin{pmatrix}1300-200\times0{,}75^n\\900+200\times0{,}75^n\end{pmatrix}$$

Exercice 7364

On considère la matrice B carré d'ordre 3 définie par :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la relation :

$$B^n = B^2$$

8. Inverse :

Exercice 5094

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les matrices des produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B?

Exercice 5095

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. Que peut-on dire des matrices A et B?

Exercice 5096

On considère les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les produits $A{\cdot}B$ et $B{\cdot}A$.
2. En déduire la matrice inverse de la matrice A.

Exercice 5116

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de la matrice $A^2{+}A$.
2. En déduire l'expression de la matrice inverse de A.

Exercice 5117

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'expression de la matrice $A^2{-}3{\times}A$.
2. En déduire l'expression de la matrice inverse de A.

Exercice 6825

On donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M^2.

On donne : $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$

2. Vérifier que : $M^3{=}M^2{+}8{\cdot}M{+}6{\cdot}I_3$
3. En déduire que M est inversible et que :
   $M^{-1} = \frac{1}{6}{\cdot}\big(M^2 - M - 8{\cdot}I\big)$

Exercice 6871

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. a. Déterminer l'expression de la matrice A^2.
   b. Déterminer l'expression de $A^2{-}2{\cdot}A$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et donner l'expression de l'inverse de A.

9. Inverses de matrices d'ordre 2 :

Exercice 5097

Déterminer les inverses des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & -4\end{pmatrix}$ f. $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -4\end{pmatrix}$

Exercice 5112

1. Soit n un entier naturel non-nul. On considère A et B deux matrices carrées d'ordre n inversible et λ un nombre réel non-nul.
   a. Montrer que le produit $A{\cdot}B$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
   b. Montrer que la matrice $\lambda{\cdot}A$ est une matrice inversible dont on précisera l'inverse.
2. On considère les deux matrices A et B suivantes :
   $$A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$
   Montrer que la relation suivante est fausse :
   $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

Exercice 6828

Etablir que chacune des matrices ci-dessous sont inversibles et déterminer l'expression de leurs matrices inverses :

a. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

10. Résolution de systèmes :

Exercice 5110

1. On considère la matrice A définie par :
   $$A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$
   Déterminer l'inverse de la matrice A.
2. On considère le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} 3x - 4y = 1\\ x - y = 1\end{cases}$$
   a. Traduire ce système d'équation par une relation matricielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 5111

1. On considère les deux matrices suivants :
   $$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -6\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$
   Montrer que ces deux matrices sont inverses l'une de l'autre.
2. Résoudre les systèmes suivants d'équations :
   $$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0\\ 2x + y + 2z = -9\\ 2x + z = -8\end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x + 2y - 2z = -2\\ 2x + 5y - 6z = -7\\ -2x - 4y + 5z = 8\end{cases}$$

Exercice 6869

On considère la matrice A définie par : $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$

1. a. Effectuer le calcul : $4{\cdot}A - A^2$
   b. En déduire l'expression de la matrice inverse de la matrice A.
   c. Donner l'expression de la matrice : $B=\dfrac{4}{5}{\cdot}I_2-\dfrac{1}{5}{\cdot}A$.
2. On considère les deux matrices X et Y définies par :
   $$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \quad ; \quad Y=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$
   En utilisant la question 1., résoudre le système :
   $$\begin{cases} x + y = 3\\ -2{\cdot}x + 3{\cdot}y = 1\end{cases}$$

11. Avec un logiciel de calcul formel :

Exercice 5113

On considère la matrice carrée A d'ordre 3 définie par :
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

1. a. A l'aide d'un logiciel de calcul matriciel, établir que la matrice A est inversible et donner l'expression de la matrice A^{-1}.
   b. A la main, vérifier que : $A{\cdot}A^{-1}=I_3$
2. A l'aide du logiciel de calcul matriciel, résoudre le système d'équations suivant :
   $$\begin{cases} x - 2y - 2z = 11\\ -x + y + 2z = -9\\ 2y - z = -3\end{cases}$$

Exercice 5114

Résoudre chacun des systèmes d'équations suivants à l'aide d'un logiciel de calcul matriciel :

a. $\begin{cases} 3x-3y-2z = 0 \\ 3x+y+z = -2 \\ -2x+3y+2y = -1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} 2x-3y+z = -8 \\ -3x+2y-3z = 3 \\ x-y+z = -1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} -x-3y-2z = -1 \\ -3x-2y+2z = 0 \\ 3x+3y-y = -1 \end{cases}$ d. $\begin{cases} -2x-3y-2z = 2 \\ -3x-3y+2z = 1 \\ x+2y+3z = -2 \end{cases}$

12. Matrice diagonalisable :

Exercice 5161

On considère les matrice A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1}.

2. a. Etablir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
$A = P{\cdot}D{\cdot}P^{-1}$
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}P^{-1}$
   c. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n.

Exercice 5160

On considère les matrice A et P définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice P^{-1}.

2. a. Etablir l'égalité suivante :
$$A = P{\cdot}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}{\cdot}P^{-1}$$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de A^n.

Exercice 5158

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. On note D la matrice définie par : $I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   a. Etablir l'égalité : $A = P{\cdot}D{\cdot}Q$
   b. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}Q$
   c. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 5159

On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -7 & 4 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et les deux matrices P et Q définies par :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'existence d'une matrice D vérifiant l'égalité :
$A = P{\cdot}D{\cdot}Q$
et admettant pour expression :
$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{où } a,\ b,\ c \text{ sont trois réels}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir que pour tout entier naturel n, on a l'égalité :
$A^n = P{\cdot}D^n{\cdot}Q$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n non-nul, l'expression de la matrice A^n.

Exercice 5146

On considère la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de déterminer une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

Pour cela, on considère les deux matrices carrées P et Q :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices P et Q sont deux matrices inverses l'une de l'autre.

2. Etablir l'égalité : $A = P\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot Q$

On note D la matrice : $D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

3. a. Donner l'expression de la matrice D^n où n est un entier naturel.

   b. Etablir pour tout entier naturel n, l'égalité :
   $A^n = P\cdot D^n\cdot Q$

   c. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 5356

On considère les deux matrices de dimensions 2 :

$$A = \begin{pmatrix}-1 & -6\\ 1 & 4\end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

1. a. Justifier que la matrice P est une matrice inversible.

   b. Donner l'expression de la matrice P^{-1} inverse de la matrice P.

2. Déterminer la valeur des réels α et β réalisant l'égalité suivante :
$$A = P\cdot\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

3. a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$A^n = P\cdot\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

   b. Donner l'expression de A^n en fonction de n.

13. Matrice diagonalisable et suites :

Exercice 5357

On considère les deux suites réelles (a_n) et (b_n) définies par :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7\cdot a_n + 0{,}6\cdot b_n \\ b_{n+1} = 0{,}3\cdot a_n + 0{,}4\cdot b_n \end{cases}$$

Pour tout entier n naturel, on définit la matrice-colonne U_n définie par :
$$U_n = \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice T réalisant pour tout entier naturel n l'égalité suivante : $U_{n+1} = T\cdot U_n$

2. On suppose que : $a_0 = \dfrac{2}{3}$ et $b_0 = \dfrac{1}{3}$.

   a. Déterminer les valeurs de a_1 et b_1 à l'aide de la relation matricielle établie à la question 1..

   b. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement des suites (a_n) et (b_n)?

3. On suppose que : $a_0 = 0{,}3$ et $b_0 = 0{,}7$.

   a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a la relation :
   $U_n = T^n\cdot U_0$

   b. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'expression des matrices U_2, U_3 et U_5 à 10^{-6} près.

   c. Que peut-on conjecturer sur le comportement des suites (a_n) et (b_n)?

Exercice 5374

Une ville est composée principalement de deux quartiers qu'on note A et B.

Le quartier A est composé de 251 habitants et le quartier B est composé de 386 habitants.

1. En choisissant au hasard un habitant dans la ville, quelle est la probabilité que celui-ci vienne du quartier A? On arrondira les probabilités au millième.

On note a_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier A et b_0 la probabilité de choisir un habitant du quartier B.

La matrice-colonne ligne U_0 définie par $\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$ représentent l'état de ces probabilités lors de la première année d'étude de cette ville.

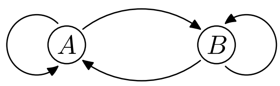
Chaque année, on estime :

- 5 % des habitants du quartier A déménage pour aller dans le quartier B ;
- 12 % des habitants du quartier B déménage pour aller dans le quartier A ;

On note a_n *(resp. b_n)* la probabilité de choisir respectivement un habitant du quartier A *(resp. du quartier B)* lors de la n-ième année d'étude.

On considère la matrice-colonne U_n définie par : $U_n = \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$

2. a. Recopier et compléter le diagramme ci-dessous afin de représenter les flux de populations entre ces deux quartiers.



   b. Ecrire les termes a_{n+1} et b_{n+1} en fonction des valeurs de a_n et b_n.

   c. Déterminer la matrice carrée T de dimensions 2 réalisant l'égalité pour tout entier naturel n :
   $U_{n+1} = T\cdot U_n$

3. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $U_n = T^n\cdot U_0$

4. A l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul ma-

triciel, déterminer les matrices-colonnes U_5, U_{10} et U_{20} dont les coefficients seront arrondis à 10^{-5}.

Exercice 5944

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases} \;;\; \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On définit la suite de matrice (X_n) par la relation $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

On considère la matrice A définie par: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

1. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a: $X_{n+1} = A{\cdot}X_n$

   b. Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier naturel n: $X_n = A^n{\cdot}X_0$

2. On définit les matrices P et P':
$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \;;\; P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   a. Montrer que les matrices P et P' sont inversibles.

   b. Déterminer la matrice B diagonale réalisant l'égalité suivante: $P'{\cdot}B{\cdot}P = A$

   c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n: $A^n = P'{\cdot}B^n{\cdot}P$

3. a. Donner l'expression de la matrice B^n en fonction de n.

   b. Etablir que la matrice X_n admet pour expression, pour tout entier naturel n: $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}{\cdot}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}{\cdot}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

14. Formule du binome de Newton :

Exercice 5130

On considère les deux matrices:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer pour tout entier naturel, l'expression des puissances I^n et A^n.

2. En déduire l'expression de la matrice $(I+A)^5$.

Exercice 5162

On considère la matrice A définie par: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B = A - I_3$. Donner l'expression de B^2 et B^3.

2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I_3+B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a:
$$A^n = \binom{n}{0}{\cdot}I_3 + \binom{n}{1}{\cdot}B + \binom{n}{2}{\cdot}B^2$$

Exercice 5163

On considère les deux matrices A et D définie par:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;;\; D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cet exercice a pour but de donner une expression de A^n pour tout entier naturel n.

1. On considère la matrice B définie par $B = A - D$. Donner l'expression de B^2 et B^3.

2. a. Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(D+B)^n$ pour n entier naturel non-nul? Justifier votre réponse.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a:
$$A^n = (-1)^n{\cdot}\binom{n}{0}{\cdot}I_3 + (-1)^{n-1}{\cdot}\binom{n}{1}{\cdot}B + (-1)^{n-2}{\cdot}\binom{n}{2}{\cdot}B^2$$

Exercice 5131

On considère la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Ecrire la matrice A sous la forme $B+C$ où B est une matrice diagonale carrée.

2. a. Pour tout entier n, donner l'expression de C^n.

   b. Vérifier que les matrices B et C sont commutatives.

   c. Etablir l'égalité suivante pour tout entier n naturel non-nul:

$$A^n = B^n + n{\cdot}C{\cdot}B^n + \binom{n}{2}{\cdot}C^2{\cdot}B^{n-2}$$

15. Formule du binome de Newton et suites :

Exercice 5164

Considérons la matrice A carrée de dimension 3 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On considère la suite (u_n) définie par :
   $u_0 = 0 \quad ; \quad u_{n+1} = 2{\cdot}u_n + 3{\times}2^n$ pour tout $n{\in}\mathbb{N}$

   Etablir que pour tout entier n, on a :
   $$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

2. On considère les deux matrices D et S définies par :
   $$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Montrer que : $D{\cdot}S = S{\cdot}D$.

   b. Montrer que pour tout $k{\geqslant}2$, on a : $S^k{=}0_3$.

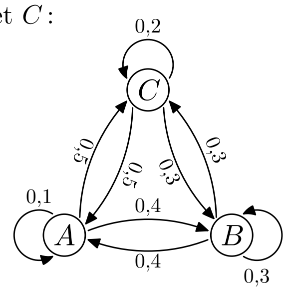
   c. A l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer l'expression de A^n pour tout entier naturel non-nul.

3. En déduire la formule explicite de la suite (u_n).

16. Matrices de transition :

Exercice 5487

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



On note a_n, b_n, c_n les probabilités associ'es à chacun des états à l'étape n.

1. Déterminer une expression de chacun des termes a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On note $U_n{=}\begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$ la matrice-ligne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice A de transition réalisant l'égalité :
   $U_{n+1} = U_n \cdot A$

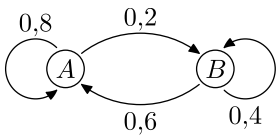
3. On note $V_n{=}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice-colonne représentant l'état à l'étape n.
   Déterminer la matrice B de transition réalisant l'égalité :
   $V_{n+1} = B \cdot V_n$

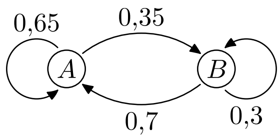
Exercice 5390

On considère un phénomène évolutif entre deux états A et B. On note respectivement a_n et b_n l'effectif associé à ces deux états au rang n.

Les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires.

Pour chaque question, déterminer la matrice T de transition vérifiant la relation : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

a. 

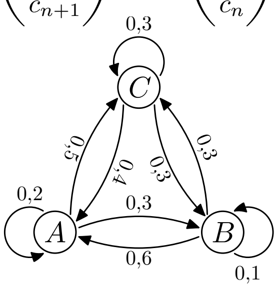
b. 

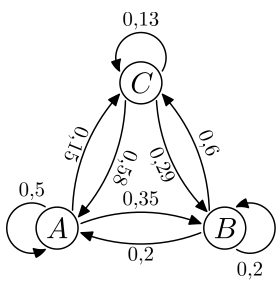
Exercice 5391

On considère un phénomène évolutif entre trois états A, B et C. On note respectivement a_n, b_n et c_n l'effectif associé à ces deux états au rang n.

Pour chaque question, les graphes ci-dessous représentent des schémas issues de processus aléatoires ; déterminer la matrice T de transition vérifiant :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = T{\cdot} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

a. 

b. 

Exercice 5392

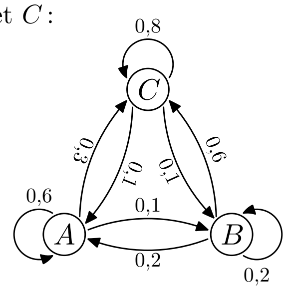
On considère un processus évolutif admettant la matrice de transition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1. On considère la matrice P définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
   a. Montrer que la matrice P est une matrice inversible et déterminer l'expression de sa matrice inverse.
   b. Déterminer l'existence d'une matrice D diagonale vérifiant l'égalité : $T = P \cdot D \cdot P^{-1}$.
   c. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :
   $T^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$
   d. En déduire l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.
2. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) de premiers termes respectifs a_0 et b_0 et vérifiant la relation :
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$
   a. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir l'égalité suivante pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = T^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$
   b. Déterminer une expression des termes de ces deux suites en fonction de n, a_0 et b_0
   c. En déduire la limite de ces deux suites.

Exercice 5488

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :



On considère la matrice-colonne $U_2 = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 2.

1. Donner la matrice de transition A réalisant la relation de récurrence :
   $U_{n+1} = A \cdot U_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur initiale des probabilités.

17. Etat de stabilite :

Exercice 5514

On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :
   $X_{n+1} = A \cdot X_n + B$
2. a. Justifier que la matrice $I_2 - A$ est inversible. On donnera l'expression de la matrice $(I_2 - A)^{-1}$.
   b. Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
   $X = A \cdot X + B$
   c. Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.
3. On considère la suite (V_n) de matrice-colone définie par :
   $V_n = X_n - X$
   En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
   $V_n = A^n \cdot V_0$
4. On considère la matrice carrée P définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
   a. Justifier que la matrice P est inversible.
   b. On note D la matrice définie par : $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
   Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.
   c. En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.
5. On prend comme valeur initiale des suites :
   $x_0 = 1 \quad ; \quad y_0 = 2$
   Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

Exercice 5515

On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) dont les termes vérifient le système suivant :
$$\begin{cases} x_{n+1} = 1{,}4x_n - 0{,}6y_n + 0{,}2 \\ y_{n+1} = 0{,}9x_n - 0{,}1y_n + 0{,}3 \end{cases}$$

1. On considère la matrice colonne B et, pour tout entier n, la matrice colonne X_n définies par :
$$B = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
   Déterminer la matrice carrée A de dimension 2 vérifiant la relation :
   $X_{n+1} = A \cdot X_n + B$

2. a. Justifier que la matrice I_2-A est inversible, puis donner a l'expression de la matrice $(I_2-A)^{-1}$.

b. Déterminer la matrice X réalisant l'égalité :
$X = A \cdot X + B$

c. Si les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes, donner les valeurs de leur limite.

3. On considère la suite (V_n) de matrices-colones définie par :
$V_n = X_n - X \quad$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

En déduire que, pour tout entier n naturel, la relation :
$V_n = A^n \cdot V_0$

4. On considère la matrice carrée P définie par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a. Justifier que la matrice P est inversible.

b. On note D la matrice définie par : $\quad D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
Donner une expression de la matrice D^n pour tout entier naturel n.

c. En déduire une expression de la matrice A^n pour tout entier naturel n.

5. En considérant les valeurs de départ :
$x_0 = 0{,}5 \quad ; \quad y_0 = 0{,}5$
Que peut-on dire sur la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?

18. Matrices et nombres complexes :

Exercice 5447

On considère la matrice carrée A d'ordre 2 définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On considère les matrices P et Q définies par :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad ; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} & -\frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} & \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

où i est le nombre complexe vérifiant : $\quad \mathrm{i}^2 = -1$.

1. Montrer que les matrices P et Q sont inverses l'une de l'autre.

2. Montrer que la matrice $P^{-1} \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. On note D cette matrice diagonale dans le reste de l'exercice.

3. a. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, la relation suivante pour tout entier naturel n :
$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

b. Justifier que pour tout entier n, on a la relation $A^{n+4} = A^n$

255. Exercices non-classés :

Exercice 3745

Déterminer le carré des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6069

On considère les deux matrices A et B définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = k \cdot A \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Pour quelles valeurs de k la matrice B vérifie l'égalité :
$B^2 = B$

Exercice 6100

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 4-2^{n+2} \\ 3\times 2^n - 3 & 4 - 3\times 2^n \end{pmatrix}$$

2. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

4. Montrer que pour tout entier naturel non-nul n, on a :
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -2\times(-1)^n & -3\times(-1)^n \\ 2\times(-1)^n & 3\times(-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6826

On considère la matrice : $\quad A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

1. On appelle I la matrice identité d'ordre 2.
Vérifier que : $\quad A^2 = A + 2 \cdot I$

2. En déduire une expression de A^3 et une expression de

A^4 sous la forme $\alpha \cdot A + \beta \cdot I$ où α et β sont des réels.

3. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2 \cdot r_n \end{cases}$$

Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$A^n = r_n \cdot A + s_n \cdot I$

