Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Congruences

1. Premiers exercices de congruences :

Exercice 3402

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

a. $15 \equiv 27 \pmod{3}$
b. $17 \equiv 11 \pmod{4}$
c. $153 \equiv 237 \pmod{12}$
d. $-5 \equiv 8 \pmod{13}$
e. $-81 \equiv 224 \pmod{6}$
f. $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$

Exercice 3365

1. Déterminer une valeur de l'entier $a \in [10\,;20]$ pour laquelle l'égalité est vraie :

a. $25 \equiv a \pmod{4}$
b. $37 \equiv a \pmod{10}$
c. $52 \equiv a \pmod{7}$
d. $5 \equiv a \pmod{14}$
e. $1 \equiv a \pmod{9}$
f. $13 \equiv a \pmod{5}$

2. Déterminer une valeur de n pour laquelle l'égalité est vraie :

a. $21 \equiv 1 \pmod{n}$
b. $14 \equiv 4 \pmod{n}$
c. $9 \equiv 14 \pmod{n}$
d. $10 \equiv 25 \pmod{n}$

2. Manipulations algébriques :

Exercice 3468

On considère les entiers :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

1. a. Montrer que $1\,000$ est divisible par 8.
   b. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
   c. Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
2. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
3. a. Montrer que B^2 est divisible par 8.
   b. Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
   c. Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice 3493

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1 \pmod{4}$
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice 3278

Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7?
2. Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y.

Exercice 3598

Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$$n^2+n+3 \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{si, et seulement si,} \quad n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Exercice 3632

1. Montrer que pour tout entier naturel n, 3 divise l'entier $2^{2n}-1$.
2. Soit p un entier naturel. Montrer que parmi les entiers p, $p+10$, $p+20$, un et un seul d'entre eux est divisble par 3.

3. Puissances congru à 0 :

Exercice 738

Soit p une entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que si il existe un entier naturel n tel que $a^n \equiv 0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k, on a l'implication : $k \geqslant n \implies a^k \equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 5453

1. Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence :
   $6^k \equiv 0 \pmod{4}$
2. Pour tout entier naturel a, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul :
   $(a+6)^n \equiv a^n + 6{\cdot}n{\cdot}a^{n-1} \pmod{4}$

Exercice 5454

1. Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence :
   $6^n \equiv 0 \pmod{8}$
2. Pour tout entier naturel n, déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8 :
   $A = 6^n + 9^n$

4. Puissances, congruences et cyclicités :

Exercice 3403

1. (a.) Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

   (b.) En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

2. (a.) Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5 :

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

   (b.) Etablir que l'entier $\left(12^{39}-3\right)$ est divisible par 5.

Exercice 5037

1. Compléter le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4
Reste de 3^n par 5					

2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
   $2008^{4\cdot n} \equiv 1 \pmod{5}$
3. En déduire que $2008^{2008}-31$ est divisible par 5.

Exercice 3571

1. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2 009 par 11.
2. Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
3. Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2\,009}+2\,009$ par 11.

Exercice 3408

1. (a.) Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n \in \mathbb{N}$ où $n \leqslant 6$.
   On complétera le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

   (b.) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. (a.) Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1515 modulo 7.
   (b.) Après avoir remarqué que $2004 = 6 \times 334$, déduire de la question 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.
   (c.) Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7, le reste est 2.

Exercice 4309

On considère l'entier $N = 11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

5. Equations :

Exercice 3599

On considère l'ensemble : $A_7 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$

1. Pour tout élément a de A_7, écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $a{\cdot}y \equiv 1 \pmod{7}$.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

2. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation :
   $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

3. Soit a un élèment de A_7, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

Exercice 5455

Soit x un entier relatif.

1. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

   a. $4 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$ b. $6 \cdot x \equiv 3 \pmod{7}$

2. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

   a. $5 \cdot x \equiv 2 \pmod{6}$ b. $2 \cdot x \equiv 3 \pmod{6}$

6. Raisonnement par récurrence :

Exercice 3294

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

Exercice 3457

Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $5^n - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 3494

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$$

255. Exercices non-classés :

Exercice 5820

On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme :

```
Fonction f(A)
    X ← A
    Tant que X⩾26
        X ← X−26
    Fin du tant que
    Renvoyer X
```

1. Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 3?

2. Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 55?

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente la valeur renvoyée par cette fonction?

Exercice 5826

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

a. 5^6 b. 5^{6p}, pour $p \in \mathbb{N}^*$ c. 33^{38}

Exercice 5830

1. Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division par 7 de l'entier :
   $A = n^2 - n + 1$

2. En déduire les entiers n tels que l'entier A soit divisible par 7.

3. Déterminer le reste de la division par 7 de l'entier :
   $B = 2\,753^2 - 2\,753 + 1$

Exercice 6804

On considère l'entier de Mersenne $2^{33} - 1$.
Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33}-1) \div 3$
2863311530
$(2^{33}-1) \div 4$
2147483648
$(2^{33}-1) \div 12$
715827882,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33}-1)$ et 4 divise $(2^{33}-1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33}-1)$.

1. Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33}-1)$.

2. En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, montrer que, en réalité, 3, ne divise pas $2^{33}-1$.

3. Calculer la somme :
   $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \cdots + (2^3)^{10}$

4. En déduire que 7 divise $2^{33}-1$.

Exercice 6925

Soit p, q, r trois entiers relatifs vérifiant :

$$\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \pmod{6} \\ 3p - 3q \equiv 0 \pmod{6} \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

En déduire que ces entiers vérifient le système :

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod{3} \\ p - q \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

