

Terminales S - Spécialité/Congruences

1. Premiers exercices de congruences :

Exercice 3402

Vérifier la véracité de chacune des égalités suivantes :

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------|
| a. $15 \equiv 27 \pmod{3}$ | b. $17 \equiv 11 \pmod{4}$ |
| c. $153 \equiv 237 \pmod{12}$ | d. $-5 \equiv 8 \pmod{13}$ |
| e. $-81 \equiv 224 \pmod{6}$ | f. $37^4 \equiv 1 \pmod{4}$ |

Exercice 3365

1. Déterminer une valeur de l'entier $a \in [10; 20]$ pour

laquelle l'égalité est vraie :

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a. $25 \equiv a \pmod{4}$ | b. $37 \equiv a \pmod{10}$ |
| c. $52 \equiv a \pmod{7}$ | d. $5 \equiv a \pmod{14}$ |
| e. $1 \equiv a \pmod{9}$ | f. $13 \equiv a \pmod{5}$ |
2. Déterminer une valeur de n pour laquelle l'égalité est vraie :
- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| a. $21 \equiv 1 \pmod{n}$ | b. $14 \equiv 4 \pmod{n}$ |
| c. $9 \equiv 14 \pmod{n}$ | d. $10 \equiv 25 \pmod{n}$ |

2. Manipulations algébriques :

Exercice 3468

On considère les entiers :

$$A = 8\,387\,592\,115 \quad ; \quad B = 9\,276\,312\,516$$

- Montrer que 1 000 est divisible par 8.
 - Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
 - Donner l'entier naturel b strictement inférieur à 8 tel que B soit congru à b modulo 8.
- Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $A+B$ et à $A \cdot B$
- Montrer que B^2 est divisible par 8.
 - Montrer que A^2 n'est pas divisible par 8.
 - Montrer que A^{100} n'est pas divisible par 8.

Exercice 3493

Soit n un entier naturel.

- Développer $(n+3)^4$.
- Montrer que : $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1 \pmod{4}$
- Etudier en fonction du reste de la division euclidienne

de n par 4, la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice 3278

Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.

- Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7?
- Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si, et seulement si, 7 divise x et 7 divise y .

Exercice 3598


Soit n un entier relatif. Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie :

$$n^2 + n + 3 \equiv 0 \pmod{5} \quad \text{si, et seulement si,} \quad n \equiv 1 \pmod{5}.$$

Exercice 3632

- Montrer que pour tout entier naturel n , 3 divise l'entier $2^{2n} - 1$.
- Soit p un entier naturel. Montrer que parmi les entiers $p, p+10, p+20$, un et un seul d'entre eux est divisible par 3.

3. Puissances congru à 0 :

Exercice 738 

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et a un entier naturel non-nul

Montrer que si il existe un entier naturel n tel que $a^n \equiv 0 \pmod{p}$ alors pour tout entier naturel k , on a l'implication: $k \geq n \implies a^k \equiv 0 \pmod{p}$

Exercice 5453 

- Déterminer le plus petit entier k réalisant l'équivalence: $6^k \equiv 0 \pmod{4}$
- Pour tout entier naturel a , à l'aide d'un raisonnement

Exercice 5454 

- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n réalisant la congruence: $6^n \equiv 0 \pmod{8}$
- Pour tout entier naturel n , déterminer la valeur du reste de l'entier A défini ci-dessous par la division euclidienne par 8: $A = 6^n + 9^n$

4. Puissances, congruences et cyclicités :**Exercice 3403** 

- a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 7^n par 4:

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

- b. En déduire le reste de la division euclidienne de 7^{235} par 4.

- a. Compléter le tableau ci-dessous où r_n représente le reste de la division euclidienne de 12^n par 5:

n	0	1	2	3	4	5
r_n						

- b. Etablir que l'entier $(12^{39} - 3)$ est divisible par 5.

Exercice 5037 

- Compléter le tableau de valeurs suivant:

n	0	1	2	3	4
Reste de 3^n par 5					

- Justifier que pour tout entier naturel n , on a: $2008^{4n} \equiv 1 \pmod{5}$
- En déduire que $2008^{2008} - 31$ est divisible par 5.

Exercice 3571  **5. Equations :****Exercice 3599**  

On considère l'ensemble: $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- Pour tout élément a de A_7 , écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.

par récurrence, établir la congruence ci-dessous pour tout entier naturel n non-nul:

$$(a + 6)^n \equiv a^n + 6 \cdot n \cdot a^{n-1} \pmod{4}$$

- Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.
- Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.
- Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

Exercice 3408  

- a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n \in \mathbb{N}$ où $n \leq 6$.

On complétera le tableau suivant:

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

- b. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.
- a. Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1515 modulo 7.
- b. Après avoir remarqué que $2004 = 6 \times 334$, déduire de la question 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.
- c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7, le reste est 2.

Exercice 4309  

On considère l'entier $N = 11^{2011}$. Montrer que l'entier N est congru à 4 modulo 7.

a	1	2	3	4	5	6
y						6

- Pour x entier relatif, démontrer que l'équation: $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.

3. Soit a un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

Exercice 5455 

Soit x un entier relatif.

1. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7, résoudre dans \mathbb{Z} les équations suivantes :

a. $4 \cdot x \equiv 1 \pmod{7}$ b. $6 \cdot x \equiv 3 \pmod{7}$

2. En étudiant les restes possibles de la division euclidienne de x par 6, résoudre dans \mathbb{Z} les équations suivantes :

a. $5 \cdot x \equiv 2 \pmod{6}$ b. $2 \cdot x \equiv 3 \pmod{6}$

6. Raisonnement par récurrence :

Exercice 3294  

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 14 \quad ; \quad u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.

Exercice 3457 

Montrer par un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n , l'entier $5^n - 1$ est un multiple de 4.

Exercice 3494 

Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n non-nul, on a :

$$x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})$$

255. Exercices non-classés :

Exercice 5820  

On considère la fonction f extrait d'un algorithme :

```

Fonction f(A)
  X ← A
  Tant que X ≥ 26
    X ← X - 26
  Fin du tant que
  Renvoyer X
  
```

- Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction f lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 3?
- Qu'elle est la valeur renvoyée par la fonction f lorsqu'elle est appelée avec pour argument l'entier 55?
- Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente la valeur renvoyée par cette fonction?

Exercice 5826  

Utiliser les congruences pour calculer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers suivants :

a. 5^6 b. 5^{6p} , pour $p \in \mathbb{N}^*$ c. 33^{38}

Exercice 5830  

- Etudier, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division par 7 de l'entier :
 $A = n^2 - n + 1$
- En déduire les entiers n tels que l'entier A soit divisible par 7.
- Déterminer le reste de la division par 7 de l'entier :
 $B = 2753^2 - 2753 + 1$

Exercice 6804  

On considère l'entier de Mersenne $2^{33} - 1$. Un élève utilise sa calculatrice et obtient les résultats ci-dessous.

$(2^{33} - 1) \div 3$	2863311530
$(2^{33} - 1) \div 4$	2147483648
$(2^{33} - 1) \div 12$	715827882,6

Il affirme que 3 divise $(2^{33} - 1)$ et 4 divise $(2^{33} - 1)$ et 12 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.

- Justifier que, en réalité, 4 ne divise pas $(2^{33} - 1)$.
- En remarquant que $2 \equiv -1 \pmod{3}$, montrer que, en réalité, 3, ne divise pas $2^{33} - 1$.
- Calculer la somme :
 $S = 1 + 2^3 + (2^3)^2 + (2^3)^3 + \dots + (2^3)^{10}$
- En déduire que 7 divise $2^{33} - 1$.

Exercice 6925  

Soit p, q, r trois entiers relatifs vérifiant :

$$\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \pmod{6} \\ 3p - 3q \equiv 0 \pmod{6} \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

En déduire que ces entiers vérifient le système :

$$\begin{cases} q - r \equiv 0 \pmod{3} \\ p - q \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$