Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

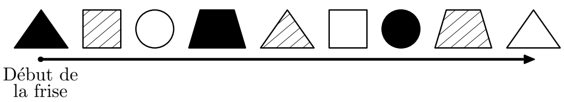
Terminales S - Spécialité/Arithmétique et divisibilité

1. Introduction :

Exercice 5701

Une frise est constituée de carrés, triangles, cercles et trapèzes se succédant régulièrement. Ces èlèments sont successivement peints en blanc, avec des rayures ou en noir.

Le début de la frise est représenté ci-dessous :



1. Donner les caractéristiques du $113^{\text{ième}}$ élément de cette frise.
2. Quel est l'élément suivant le $113^{\text{ième}}$ élément et ayant les mêmes caractéristiques.

Exercice 5702

Un système de codage permet de transformer toute lettre d'un texte en un autre rendant ainsi le texte illisible.

Pour cela, il numérote les lettres de l'alphabet en commençant par 0. Une transformation sur l'entier permet alors de changer la lettre.

Voici le tableau de correspondance de ce codage :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	F	I	L	O	R	U	X	A	D	G															

Quelle a-été la transformation utilisée sur les entiers?

2. Division euclidienne :

Exercice 3328

1. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, compléter le tableau ci-dessous afin de déterminer le PGCD des nombrse 240 et 36 :

Dividende	Diviseur	Reste
240	36	...
...	...	...
...	...	...

$240 = \dots \times 36 + \dots$

$\dots = \dots \times \dots + \dots$

$\dots = \dots \times \dots + \dots$

2. Rendre la fraction $\dfrac{240}{36}$ irréductible en effectuant une unique simplification. Par quel entier avez-vous simplifier? Justifier votre démarche.

Exercice 3329

1. Calculer le Plus Grand Commun Diviseur *(PGCD)* de 496 et de 806.
2. Ecrire $\dfrac{496}{806}$ sous la forme d'une fraction irréductible.
3. Calculer $\dfrac{496}{806} - \dfrac{3}{26}$
(on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible)

Exercice 3330

1. Déterminer la division euclidienne de $1\,038$ par 17.
2. En étudiant le carré $(61{\times}17{+}1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de $1\,038^2$ par 17.
3. En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de $1\,038^n$ par 17.

Exercice 3339

α et β représentent deux entiers ; on considère les quatre phrases suivantes :

1. α est un multiple de β ;
2. α a pour multiple β ;
3. α est un diviseur β ;
4. α a pour diviseur β.

Les phrases ci-dessus sont équivalentes deux à deux ; retrou-

 BY-NC

ver les phrases équivalents.

Exercice 4696

L'année 2012 était une année bissextile et le 1$^{\text{er}}$ Janvier 2012 était un dimanche.

1. a. Combien de jour sépare le 1$^{\text{er}}$ Janvier 2012 et le 20 Janvier 2012.

   b. Donner la division euclidienne de 19 par 7.

   c. Quel jour de la semaine était-on le 20 Janvier 2012.

2. Déterminer le jour de la semaine du 25 Mars 2012.

Exercice 4995

1. Déterminer à l'aide de l'algorithme d'Euclide le $PGCD$ des entiers 410 et 246 :

Dividende	Diviseur	Reste
410	246	...
...	...	...
...	...	...

$410 = \ldots \times 246 + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

$\ldots = \ldots \times \ldots + \ldots$

2. a. Simplifier la fraction $\dfrac{246}{410}$.

   b. Effectuer les calculs suivants :
   $\dfrac{246}{410} - \dfrac{8}{5}$; $\dfrac{1}{246} - \dfrac{1}{410}$

Exercice 5840

On considère la fonction `f` extrait d'un algorithme dont l'appel s'effectue en lui passant en argument deux entiers naturels `a` et `b` :

```
Fonction f(a,b)
    c ← 0
    Tant que a>b
        c ← c+1
        a ← a−b
    Fin Tant que
    Renvoyer (c ; a)
```

1. Donner le couple renvoyé par la fonction `f` lorsqu'elle est appelée avec les arguemnts `a`$=13$ et `b`$=4$. Dans une exécution pas à pas de l'appel à la fonction f, on indiquerales valeurs des variables `a`, `b`, `c` au cours de cet appel.

2. Que représente le couple renvoyé lors de l'appel à la fonction `ff` ?

3. Divisibilité :

Exercice 3332

1. Compléter intuitivement les deux tableaux à double entrée suivants :

$+$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

$\times$	Pair	Impair
Pair		
Impair		

2. En remarquant les deux caractérisations suivantes :
   - Si $n \in \mathbb{Z}$ est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
     $n = 2{\cdot}k$
   - Si $n \in \mathbb{Z}$ est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
     $n = 2{\cdot}k + 1$

   Répondre aux questions suivantes :

   a. Démontrer que la somme de deux entiers impairs est pair.

   b. Démontrer que le produit de deux entiers impairs est impair.

Exercice 3334

1. a. Pour k un entier naturel non-nul développer l'expression : $A = \left(2{\cdot}k+1\right)^2 - 1$.

   b. Justifier que A est un multiple de 8.

2. On considère l'expression $B = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$:

   a. Démontrer que pour n pair, B est impair.

   b. Démontrer que pour n un entier impair strictement supérieur à 1, B est pair et divisible par 8.

Exercice 3335

1. a. Déterminer la valeur de a et b deux entiers relatifs tels que, pour tout entier relatif n, on a :
   $$\frac{4n+1}{n+1} = a + \frac{b}{n+1}$$

   b. En déduire les valeurs de n pour laquelle $\dfrac{4n+1}{n+1}$ est un entier.

2. Déterminer, si elles existent, les valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ tels que les fractions suivantes aient des valeurs entières :

   a. $\dfrac{6n+9}{2n+1}$ b. $\dfrac{9-6n}{3n-4}$

Exercice 3490

1. Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre :
   $$A_n = \frac{2n^2 - n - 11}{n-1}$$

   a. Déterminer la valeur des entiers relatifs a, b, c vérifiant la relation suivante pour tout entier naturel n distinct de 1 :
   $$A_n = a{\cdot}n + b + \frac{c}{n-1}$$

   b. En déduire les valeurs de n telles que l'entier A_n est un nombre entier.

2. On considère pour tout entier relatif, le nombre B_n défini par :

CC BY-NC

$$B_n = \frac{2n^2 - 3n - 15}{2n+3}$$

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles B_n est un entier relatif.

Exercice 4999

1. On considère l'entier A défini par :
$A = m\times\big(4\cdot n+1\big)$ où $m, n\in\mathbb{N}$.

On cherche à déterminer les valeurs de m et n réalisant l'égalité $A=45$.

a. En étudiant la relation $45=m\times(4\cdot n+1)$, donner un ensemble de valeurs possibles de m.

b. En déduire l'ensemble des couples $(m\,;n)$ réalisant $A=45$.

2. On considère l'entier B définie par :
$B = \big(2\cdot m+3\big)\cdot\big(2\cdot n\big)$ où $m, n\in\mathbb{N}$

Déterminer l'ensemble des couples $(m\,;n)$ d'entiers vérifiant la relation $B=70$.

Exercice 5035

Montrer que la somme des carrés de deux entiers consécutifs est un entier impair

Exercice 5036

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier n naturel, le reste de 10^n par la division euclidienne par 3 vaut 1.

2. Justifier que l'entier $4\times10^n-1$ est, pour tout entier naturel n, divisible par 3.

Exercice 6783

Soit n un entier relatif. Etablir la propriété suivante :

$2n+3$ est un multiple de 7 $\Longrightarrow$ $3n+1$ est un multiple de 7.

4. Reste de la division euclidienne :

Exercice 3331

On donne la division euclidienne de 195695 par 3 :

$195\,695 = 65\,231\times3+2$

1. Justifier que le reste de la division euclidienne de $\big(195\,695\times2\big)$ par 3 est 1.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\big(195\,695\times3\big)$ par 3.

3. On note r_n le reste de la division euclidienne de $\big(195\,695\times n\big)$ par 3. Compléter de tête le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7
r_n							

Exercice 3359

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que le quotient de la division euclidienne de n par 5 soit égal au reste par la même division.

Exercice 6785

On donne les deux divisions euclidiennes par 5 suivantes :
$5474 = 1094\times5+4$; $5487 = 1097\times5+2$

Sans utiliser la calculatrice et sans calculer de produit, montrer que l'entier 5474^2+5487^2 est divisible par 5.

Votre démarche doit être entièrement présente sur votre copie.

Exercice 6772

n est un entier naturel.
Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire :
$n = 7\cdot q+r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r? Quelles sont les valeurs possibles pour r?

2. On divise n^2 par 7. Quelles sont les restes possibles?

3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.

5. Raisonnement par disjonction de cas :

Exercice 6774

Montrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6.

Pour cela, on considère les trois cas suivants :

- Le premier des entiers est divisible par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 1 par la division euclidienne par 3.
- Le premier des entiers a un reste de 2 par la division euclidienne par 3.

6. Raisonnement par l'absurde :

 BY-NC

Exercice 6775

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}$ suivante :

(E) : $a^2 + 9 = 2^{40}$

1. Montrer que si a existe alors a est impair.
(on pourra utiliser un raisonnement par l'absurde)

2. a. Compléter le tableau suivant :

r	1	3	5	7
r^2				
Reste de r^2 par la division euclidienne par 8				

b. La division euclidienne de a par 8 donne l'existence d'un unique couple $(q\,;r)$:
$a = 8{\cdot}q + r \quad ; \quad 0 \leqslant r < 8$
Justifier que si l'entier a est impair, alors l'expression a^2+9 n'est pas divisible par 8.

c. En déduire que l'équation (E) n'admet pas de solution.

Exercice 6769

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x\,;y)z$ tels que :

$x^2 + y^2 = z^2$

Ces triplets seront nommés "*triplets pythagoriciens*" en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et noté en abrégé "*TP*".
Ainsi $\big(3\,;4\,;5\big)$ est un *TP* car : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

1. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(p{\cdot}x\,;p{\cdot}y\,;p{\cdot}z)$ est lui aussi un *TP*.

2. Démontrer que, si $(x\,;y\,;z)$ est un *TP*, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.

7. Raisonnement par contraposée :

Exercice 6784

Soit n un entier naturel. Démontrer l'assertion suivante :

n^2 est impair $\Longrightarrow$ n est impair.

255. Exercices non-classés :

Exercice 5979

n est un entier naturel.
Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire :

$n = 7q + r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r ? Quelles sont les valeurs possibles pour r ?

2. On divise n^2 par 7. Quelles sont les valeurs possibles pour r ?

3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.

4. n et m sont deux entiers naturels. On divise $n^2{+}m^2$ par 7. Quels sont les restes possibles?

5. En déduire que si 7 divise $n^2{+}m^2$ alors 7 divise n et m.

Exercice 6768

Soit n un entier relatif. On considère les deux propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}$ "*le reste de la division euclidienne de n par 5 vaut 1*"
- $\mathcal{P}'$ "*le reste de la division euclidienne de n par 4 vaut 3*"

1. a. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $n{-}11$ par 5.

b. Soit n un entier naturel vérifiant la propriété $\mathcal{P}'$. Justifier que l'entier $n{-}11$ est un multiple de 4.

2. Sans justification, donner trois entiers vérifiant les deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Exercice 6770

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n{\cdot}\big(n+1\big)}{2}$$

1. Montrer que l'entier $1{+}2{+}\cdots{+}n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $n^2{+}n{-}2{\cdot}p^2{=}0$.

2. En déduire que l'entier $1{+}2{+}\cdots{+}n$ est le carré d'un entier si, et seulement si, il existe un entier naturel p tel que $(2n{+}1)^2{-}8p^2{=}1$

Exercice 6805

On admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :

$n{=}2^\alpha{\times}k$

où α est un entier naturel *(éventuellement nul)* et k un entier naturel impair.

L'écriture $n{=}2^\alpha{\times}k$ est nommée *décomposition* de n.

Voici par exemple les décompositions des entiers 9 et 120 :

$9 = 2^0{\times}9 \quad ; \quad 120 = 2^3{\times}15$.

1. Donner la décomposition de l'entier 192.

 BY-NC

2. Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont :
$x = 2^{\alpha} \times k \quad ; \quad z = 2^{\beta} \times m$

Ecrire la décomposition des entiers naturels $2{\cdot}x^2$ et z^2.

3. En examinant l'exposant de 2 dans la décomposition $2{\cdot}x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x\,;y)$ tels que :
$2{\cdot}x^2 = z^2$

Exercice 6965

Un numéro de carte bancaire est de la forme :
$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}c$
où a_1, a_2, $\dots$, a_{15} et c sont des chiffres compris entre 0 et 9. Les quinze premiers chiffres contiennent des informations sur le type de carte, la banque et le numéro de compte bancaire. c est la clé de validation du numéro. Ce chiffre est calculé à partir des quinze autres. La fonction ci-dessous permet de valider la conformité d'un numéro de carte donné.

```
Fonction f(a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11
                 ,a12,a13,a14,a15,a16,a17,c)
    i ← 0
    p ← 0
    r ← 0
    Pour k allant de 0 à 7
        r ← le reste de la division euclidienne
                  de 2·a2k+1 par 9
    i ← i+r
    Fin Pour
    Pour k allant de 1 à 7
        p ← p+a2k
    Fin Pour
    s ← i+p+c
    Si s est un multiple de 10 alors :
        Renvoyer 1
    Sinon
        Renvoyer 0
    Fin Si
```

On considère le numéro de carte suivant : 5635 4002 9561 3411

1. Compléter le tableau ci-dessous permettant d'obtenir la valeur finale de la variable I.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_{2k+1}								
$2a_{2k+1}$								
r								
i								

2. Justifier que le numéro de la carte 5635 4002 9561 3411 est correct.

3. On modifie le numéro de cette carte en changeant les deux premiers chiffres. Le premier chiffre *(initialement* 5*)* est changé en 6.
Quel doit être le deuxième chiffre a pour que le numéro de carte obtenu $6a35\;4002\;9561\;3411$ reste correct?

 BY-NC