Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Annales sur les similitudes

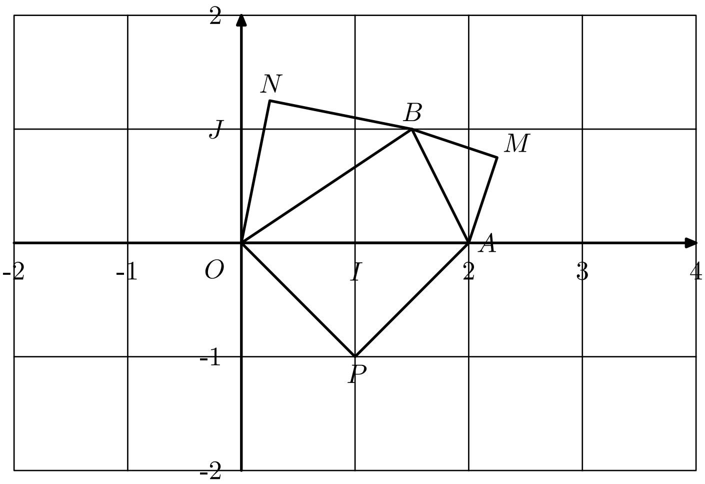
1. Similitudes directes :

Exercice 3949

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ}\right)$ orthonormal direct. On considère les points A et B d'affixes respectives :

$z_A = 2 \quad ; \quad z_B = \dfrac{3}{2} + \mathrm{i}$

On considère les points M, N et P tels que les triqngles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous :



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N. On considère la transformation :

$r = s_2 \circ s_1$

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. **A l'aide des transformations :**
   a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2.
   b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r.
   c. Justifier que r est une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.
   d. Quelle est l'image du point O par r ?
   e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.
2. **En utilisant les nombres complexes :**
   a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2. On utilisera les résultats de la question 1. a..
   b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N.
   c. Donner, sans justification, l'affixe z_p du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

Exercice 3147

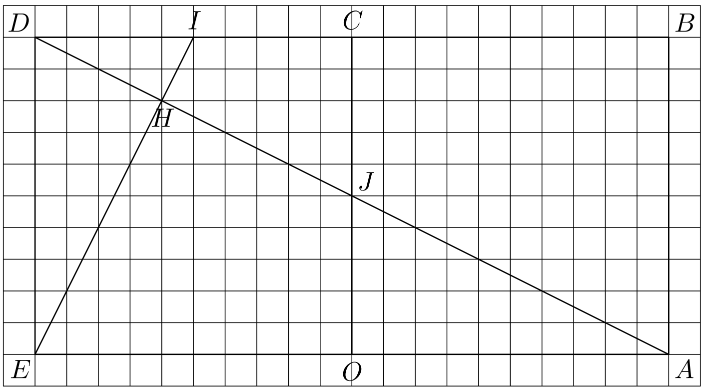
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$ *(unité 1 cm)*. On construira une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r.
   Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$
2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant :
   $\left\{-3\,;\,-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\,;\,-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i\right\}$
3. a. Déterminer $r(F)$.
   b. Quelle est la nature du polygone $ABCDEF$?
4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de s'? En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.
   b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?
   c. Déterminer l'écriture complexe de s'.
5. Soit A' le symétrique de A par rapport à C.
   a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(A')$ puis l'image de A' par $s' \circ s$.

b. Calculer l'affixe du point A'. Retrouver alors le résultat du a. en utilisant l'écriture complexe $s' \circ s$.

Exercice 3183

Sur la figure donnée ci-dessous, on considère les carrés $OABC$ et $OCDE$ tels que:
$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}$$
On désigne par I le milieu du segment $[CD]$, par J le milieu du segment $[OC]$ et par H le point d'intersection des segments $[AD]$ et $[IE]$



1. Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. Déterminer le rapport de cette similitude s.

   On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\dfrac{\pi}{2}$.

3. Donner, sans justifier, l'image de B par s.

4. Déterminer et placer l'image de C par s.

5. Soit Ω le centre de la similitude s:

   a. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[AI]$ et à celui de diamètre $[DE]$.

   b. Montrer que Ω ne peut être le point H.

   c. Construire Ω.

6. On considère le repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right)$

   a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.

   b. En déduire l'affixe du centre Ω de s.

Exercice 4031

On considère un carré direct $ABCD$ (*c'est à dire un carré $ABCD$ tel que* $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$) de centre I.

Soit J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[DA]$. Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que:
   $s(A) = I \quad ; \quad s(B) = K$

2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts: le point J et le centre Ω de la similitude directe s.

3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC). En déduire l'image du point C par s.

   b. Soit E l'image par s du point I. Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Démontrer que les points A, Ω et E sont alignés.
   (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$)

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A\,;\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AB}\,;\frac{1}{10}\cdot\overrightarrow{AD}\right)$.

1. Donner les affixes des points A, B, C et D.

2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe:
   $$z' = \frac{\mathrm{i}}{2}\cdot z + 5 + 5\cdot\mathrm{i}$$

3. Calculer l'affixe ω du centre Ω de s.

4. Calculer l'affixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A, Ω et E.

5. Démontrer que les droites (AE), (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω.

Exercice 4127

Le plan complexe est muni d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$ orthonormé direct.
On considère la similitude indirecte f d'écriture complexe:
$$z' = \left(1+\mathrm{i}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\overline{z}$$
où $\overline{z}$ désigne le conjugé de z.

Soient les points A et B d'affixes respectives:
$$z_A = \sqrt{6}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{2} \quad ; \quad z_B = -\sqrt{2}+\mathrm{i}\cdot\sqrt{6}$$
On note A' et B' les images respectives des points A et B par f.

Une figure fournie en ANNEXE du sujet, sera complétée et rendue avec la copie. Les différentes constructions seront faites à la règle et au compas, et les traits de construction devront apparaître clairement.

1. a. Ecrire les affixes des points A et B sous forme exponentielle.

   b. Montrer que le triangle OAB est rectangle isocèle direct.

   c. En déduire la nature du triangle $OA'B'$.

   d. Montrer que l'affixe z'_A de A' vérifie l'égalité:
   $$z_{A'} = 2\cdot z_A$$
   En déduire la construction de A' et B'.

2. On note r la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et s la symétrie orthogonale d'axe $\left(O\,;\overrightarrow{u}\right)$.
   On pose: $g = r \circ s$.

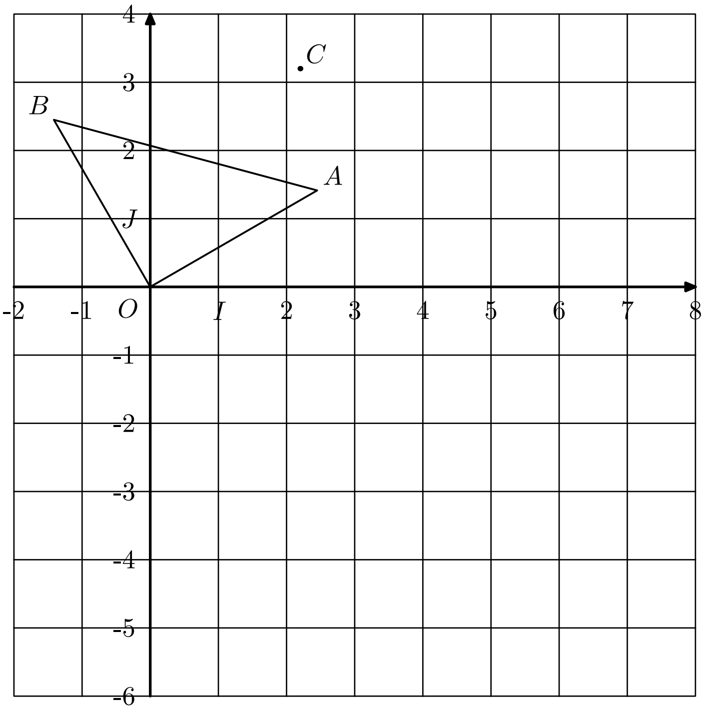
   a. Déterminer l'écriture complexe de la transformation g.

   b. Montrer que les points O et A sont invariants par g.

c. En déduire la nature de la transformation g.

3. a. Montrer que l'on peut écrire $f = h \circ g$, où h est une homothétie de centre et de rapport à déterminer.

b. Sur la figure placée en **ANNEXE**, un point C est placé. Faire la construction de l'image C' de C par la transformation f.



2. Similitudes indirectes :

Exercice 3938

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.
On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considére les points A d'affixe 1 et B d'affixe 1. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).
Montrer que l'image M' par S d'un point M d'affixe z a pour affixe :
$z' = -\mathrm{i}{\cdot}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = -\overrightarrow{AM}$ est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}$ est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

Exercice 4032

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ orthonormal direct.

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. On considère les points A d'affixe 1 et B d'affixe i. On appelle S la réflexion *(symétrie axiale)* d'axe (AB).

Montrer que l'image M' par S d'un point m d'affixe z a pour affixe :
$z' = -\mathrm{i}{\cdot}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$

2. On note H l'homothétie de centre A et de rapport -2. Donner l'écriture complexe de H.

3. On note f la composée $H \circ S$.

a. Montrer que f est une similitude.

b. Déterminer l'écriture complexe de f.

4. On appelle M'' l'image d'un point M par f.

a. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
$\overrightarrow{AM''} = -2{\cdot}\overrightarrow{AM}$
est la droite (AB).

b. Démontrer que l'ensemble des points M du plan tels que :
$\overrightarrow{AM''} = 2{\cdot}\overrightarrow{AM}$
est la perpendiculaire en A à la droite (AB).

3. Suites de points :

pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 3176

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique 4 cm)*.

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation σ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que l'écriture complexe de σ est :
   $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$
   c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que :
   $z - z' = \mathrm{i}\cdot\left(2 - z'\right)$
2. a. **Question de cours**
   - *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques modules et des arguments.*

   Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la roation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que : $q-a=\mathrm{i}(p-a)$.

   b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.
3. Soit A_0 le point d'affixe $2+\mathrm{i}$. On considère la suite $\left(A_n\right)$ de points du plan définis par :
   pour tout entier naturel n : $A_{n+1}=\sigma\left(A_n\right)$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :
   $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2$
   b. Déterminer l'affixe de A_5.
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
   pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

Exercice 3947

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ *(unité graphique : 4 cm)*. Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose : $\sigma = h \circ r$.
   a. Quelle est la nature de la transformation σ? Préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Montrer que l'écriture complexe de 4σ est :
   $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\cdot z + 1 - \mathrm{i}.$
   c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que : $z - z' = \mathrm{i}\cdot(2 - z')$
2. a. **Question de cours :**
   Prérequis : définitions géométriques du module d'un complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.
   Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'aqffixe q telle que : $q - a = \mathrm{i}\cdot(p - a)$.
   b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Ω.
3. Soit A_0 le point d'affixe $2+\mathrm{i}$. On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :
   pour tout entier naturel n : $A_{n+1}=\sigma(A_n)$.
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :
   $a_n = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{(n+2)\pi}{2}} + 2$
   b. Déterminer l'affixe de A_5.
4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
   pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

4. Arithmétiques :

Exercice 3944

1. Le plan complexe est rapporté à un repère à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :
   $z_A = 2+\mathrm{i}$; $z_B = 5+2\cdot\mathrm{i}$, $z_C = \mathrm{i}$
   s_1 désigne la symétrie d'axe (AB).
   a. Démontrer que s_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M' d'affixe z' telle que :
   $z' = \left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\right)\cdot\overline{z} + \left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}\cdot\mathrm{i}\right)$
   b. En déduire l'affixe de C', symétrique de C par rapport à (AB).
   c. Démontrer que l'ensemble des points M tels que z' est imaginaire pur est la droite $(\mathcal{D})$ d'équation :
   $4\cdot x + 3\cdot y = 1$
   d. Vérifier que le point C appartient à $\mathcal{D}$.
2. a. Démontrer que les droites $(\mathcal{D})$ et (AB) sont sécantes en un point Ω dont on précisera l'affixe ω.
   b. On désigne par s_2 la symétrie d'axe $(\mathcal{D})$ et par f la transformation définie par $f=s_2\circ s_1$. Justifier que f

est une similitude directe et préciser sont rapport.

c. Déterminer les images des points C et Ω par la transformation f.

d. Justifier que f est une rotation dont on donnera le centre.

3. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ solutions de l'équation :
$4{\cdot}x+3{\cdot}y=1.$

b. Déterminer les points de $(\mathcal{D})$ à coordonnées entières dont la distance au point O est inférieure à 9.

255. Exercices non-classés :

Exercice 4071

ABC est un triangle équilatéral tel que :
$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}+2{\cdot}k{\cdot}\pi \quad \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

Soit t un nombre réel fixe et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par :
$$\overrightarrow{AM}=t{\cdot}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BN}=t{\cdot}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CP}=t{\cdot}\overrightarrow{CA}$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,;\,\overrightarrow{v}\right)$ direct.

On note a, b, c, m, n et p, les affixes respectives des points A, B, C, M, N et P :

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.
On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\dfrac{2{\cdot}\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points :
$$\left\{(A\,;1-t)\,;\,(B\,;t)\right\}$$
et, en déduire que : $r(M)=N$.
On admet de même que : $r(N)=P \quad ; \quad r(P)=M$.

b. Soit σ_1, la similitude directe de centre G de rapport $\dfrac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}\,;\overrightarrow{GM}\right)$.
Montrer qu'elle transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

Exercice 3215

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
$x^2-x+4\equiv 0 \pmod{6}$

a. Toutes les solutions sont des entiers pairs.

b. Il n'y a aucune solution.

c. Les solutions vérifient $x\equiv 2 \pmod{6}$

d. Les solutions vérifient $x\equiv 2 \pmod{6}$ ou $x\equiv 5 \pmod{6}$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x+34y=2$, oùx et y sont des entiers relatifs.

a. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y)=(34k-7\,;\,5-24k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

b. L'équation (E) n'a aucune solution.

c. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y)=(17k-7\,;\,5-12k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

d. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y)=(-7k\,;\,5k)$ où $k\in\mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n=1789$ et $p=1789^{2005}$. On a alors :

a. $n\equiv 4 \pmod{17}$ et $p\equiv 0 \pmod{17}$

b. p est un entier premier.

c. $p\equiv 4 \pmod{17}$

d. $p\equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement, si le point M d'affixe z est tel que :

a. $z=\dfrac{b-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$

b. $a-z=\mathrm{i}(b-z)$

c. $z-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b-a)$

d. $b-z=\dfrac{\pi}{2}(a-z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I

a. $h\circ g\circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

b. $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

c. $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

d. $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3218

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le $PGCD$ de 2004 et 4002 est 6.

2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et 2^q-1.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.

4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :
   $24x + 35y = 9$
   est l'ensemble des couples :
   $(-144+70k\ ;\ 99-24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$

5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\dfrac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \mathrm{i}\,\overline{z} + (1-\mathrm{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

