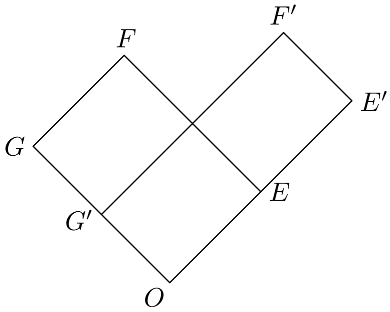
Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Annales sur les matrices

1. Matrices et suites :

Exercice 5954

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial $OEFG$ est transformé en un rectangle $OE'F'G'$, appelé image de $OEFG$.



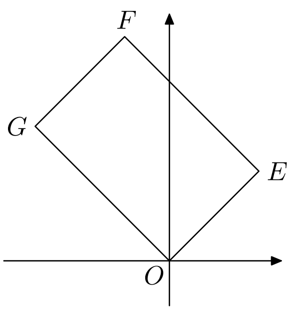
L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2\,;2)$, $(-1\,;5)$ et $(-3\,;3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;y)$ du plan le point $M'(x'\,;y')$, image du point M tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\[2mm] y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{cases}$$



1. a. Calculer les coordonnées E', F' et G', images des points E, F et G par cette transformation.

   b. Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.
   Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que :
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle $OEFG$ lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

   Une erreur a été commise.

   Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées :

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Intialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i ALLANT DE 1 A N Affecter à a la valeur $\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

   Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonées des images successives du sommet E du rectangle $OEFG$. On définit la suite des points $E_n(x_n\,;y_n)$ du plan par $E_0=E$ et la relation de récurrence :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\cdot\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
où $(x_{n+}\,;y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}.
Ainsi, $x_0=2$ et $y_0=2$.

1. On admet que, pour tout entier $n\geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme :
   $$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$$
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a :
   $$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \quad ; \quad \beta = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

2. (a.) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y=x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\,;y_n)$ du point E_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b.) Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2. Matrice de transition :

Exercice 5957

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.

Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

- S : *"l'individu est sain, c'est à dire non malade et non infecté"*,
- I : *"l'individu est porteur sain, c'est à dire non malade mais infecté"*,
- M : *"l'individu est malade et infecté"*.

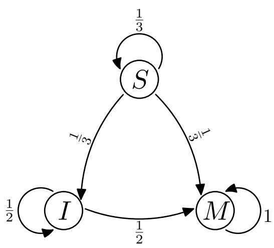
Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\dfrac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égales à $\dfrac{1}{3}$.
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égales à $\dfrac{1}{2}$.

La situation peut être représenté par un graphe probabiliste comme ci-contre.

On note $P_n=\begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade de la n-ième semaine.



On a alors $P_0=\begin{pmatrix} 0{,}99 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n :
$P_{n+1} = P_n \cdot A$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non-nul :
$P_n = P_0 \cdot A^n$

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatemment l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi :
$Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$
où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors : $Q_{n+1}=Q_n \cdot B$

D'après la partie **A**, $Q_0=P_4$. Pour la suite, on prend :
$Q_0 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89 \end{pmatrix}$
où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2=k\cdot J$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficents sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal 2 :
$B^n = B^2$

3. (a.) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$Q_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$

(b.) Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie.
Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin?

3. Matrice de transition du type : X=AX+B :

Exercice 5953

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans un grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.
En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 milliers d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.
Ainsi : $a_0=300$ et $b_0=300$.

Des observations réalisés les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante :

$$\begin{cases} a_{n+1}=0{,}7a_n+0{,}2b_n+60 \\ b_{n+1}=0{,}1a_n+0{,}6b_n+70 \end{cases}\text{, pour tout entier } n\in\mathbb{N}.$$

On considère les matrices :

$$M=\begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}2\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix} \quad ; \quad P=\begin{pmatrix}60\\ 70\end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n, on note $U_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$

1. a. Déterminer U_1.

   b. Vérifier que, pour tout entier naturel n :
   $U_{n+1}=M\times U_n+P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

   a. Calculer : $(I-M)\times\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

   b. En déduire que la matrice $I-M$ est inversible et préciser son inverse.

   c. Déterminer la matrice telle que : $U=M\times U+P$

3. Pour tout entier naturel, on pose : $V_n=U_n-U$.

   a. Justifier que, pour tout entier naturel n :
   $V_{n+1}=M\times V_n$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n :
   $V_n=M^n\times V_0$

4. On admet que, pour tout entier naturel n :
$$V_n=\begin{pmatrix}\dfrac{-100}{3}\times0{,}8^n-\dfrac{140}{3}\times0{,}5^n\\ \dfrac{-50}{3}\times0{,}8^n+\dfrac{140}{3}\times0{,}5^n\end{pmatrix}$$

   a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

   b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

4. Matrices et arithmétique :

Exercice 5956

Partie A

On considère la fonction `f`, extrait d'un algorithme, prenant pour argument un entier naturel `A` et revoyant en fin d'exécution la valeur de la variable `X` :

```
Fonction f(A)
    X ← A
    Tant que X supérieur ou égal à 26
        X ← X−26
    Fin Tant que
    Renvoyer X
```

1. Quelle est la valeur renvoyée par l'appel à la fonction `f` lorsque la valeur fournie en argument est le nombre 3?

2. Quelle est la valeur renvoyée par l'appel à la fonction `f` lorsque la valeur fournie en argument est le nombre 55?

3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat renvoyée par cette fonction?

Partie B

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante *(détaillée en quatre étapes)* :

- **Etape 1** : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

  On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix}x_1\\ y_2\end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

- **Etape 2** : $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ tel que :
$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$
  La matrice $C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

- **Etape 3** : $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$ tel que :
$$\begin{cases} z_1\equiv y_1 \pmod{26} & \text{avec } 0\leqslant z_1\leqslant25\\ z_2\equiv y_2 \pmod{26} & \text{avec } 0\leqslant z_2\leqslant25\end{cases}$$

- **Etape 4** : $\begin{pmatrix}z_1\\ z_2\end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1

> **Exemple :**
> $\text{RE} \longmapsto \begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix} \longmapsto \text{DP}$

Justifier le passage de $\begin{pmatrix}17\\4\end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix}55\\93\end{pmatrix}$ puis à $\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$

1. Soient x_1, x_2, x'_1, x'_2 quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3x'_1 + x'_2 \pmod{26} \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5x'_1 + 2x'_2 \pmod{26} \end{cases}$

b. En déduire $x_1 \equiv x'_1 \pmod{26}$ et $x_2 \equiv x'_2 \pmod{26}$, puis que $x_1 = x'_1$ et $x_2 = x'_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP

a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ tels que : $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix}$

c. Calculer $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ tels que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv y_1 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y_2 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer?

3. Dans cette question, nous allons généraliser ce procédé de décodage.
On considère un bloc de deux lettres et on appelle z_1 et z_2 les deux entiers compris entre 0 et 25 associés à ces lettres à l'étape **3**. On cherche à trouver deux entiers x_1 et x_2 compris entre 0 et 25 qui donnent la matrice colonne $\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}$ par les étapes **2** et **3** du procédé de codage.

Soient y'_1 et y'_2 tels que :

$$\begin{pmatrix}y'_1\\y'_2\end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix}2 & -1\\-5 & 3\end{pmatrix}$$

Soient x_1 et x_2, les nombres entiers tels que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv y'_1 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leqslant x_1 \leqslant 25 \\ x_2 \equiv y'_2 \pmod{26} & \text{avec } 0 \leqslant x_2 \leqslant 25 \end{cases}$$

Montrer que :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv z_1 \pmod{26} \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv z_2 \pmod{26} \end{cases}$$

Conclure.

4. Décoder QC.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6067

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé. Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note :

- X_n l'évènement "*la marque X est utilisée le mois n*" ;
- Y_n l'évènement "*la marque Y est utilisée le mois n*" ;
- Z_n l'évènement "*la marque Z est utilisée le mois n*" ;

Les probabilités des évènements X_n, Y_n, Z_n sont notées respectivement x_n, y_n, z_n.
La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition :

- Un acheteur de la marque X le mois n a le mois suivant :
  - 50 % de chance de rester fidèle à cette marque.
  - 40 % de chance d'acheter la marque Y.
  - 10 % de chance d'acheter la marque Z.
- Un acheteur de la marque Y le mois n a le mois suivant :
  - 30 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
  - 50 % de chance d'acheter la marque X ;
  - 20 % de chance d'acheter la marque Z.
- Un acheteur de la marque Z le mois n a le mois suivant :
  - 70 % de chance de rester fidèle à cette marque ;
  - 10 % de chance d'acheter la marque X ;
  - 20 % de chance d'acheter la marque Y.

1. a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, y_n et z_n.

On admet que :
$y_{n+1} = 0{,}4x_n + 0{,}3y_n + 0{,}2z_n$; $z_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}2y_n + 0{,}7z_n$

b. Exprimer z_n en fonction de x_n et y_n. En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

On admet que, pour tout entier naturel n :
$U_{n+1} = A \cdot U_n + B$
où : $A = \begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}4\\0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}2\end{pmatrix}$

Au début de l'étude statistique *(mois de janvier 2014 : $n=0$)*, on estime que :

$$U_0 = \begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}3\end{pmatrix}$$

On considère la fonction `f` de l'algorithme suivant :

`Fonction f(n)`
  `i` $\leftarrow$ `0`
  `A` $\leftarrow \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}$
  `B` $\leftarrow \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$
  `U` $\leftarrow \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}3 \end{pmatrix}$
  `Tant que i<n`
    `U` $\leftarrow$ `A·U+B`
    `i` $\leftarrow$ `i+1`
  `Fin de Tant que`
  `Renvoyer U`

a. Donner les valeurs renvoyées par cette fonction lorsqu'elle est appelée avec les valeurs $\mathtt{n}=1$ puis pour $\mathtt{n}=3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril?

Dans la suite de l'exrecice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n.

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I-A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C=A{\cdot}C+B$ équivaut à $N{\cdot}C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que :

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$$

En déduire que : $C=\begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$

4. On note V_n la matrice telle que $V_n=U_n-C$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$V_{n+1} = A \cdot V_n$

b. On admet que : $U_n=A^n{\cdot}\big(U_0-C\big)+C$.
Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai?

Exercice 6253

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N-1 \pmod{N}$
Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$

b. Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que :
$5{\cdot}k_1 \equiv 1 \pmod{26}$
On admettra que l'unique entier k tel que :
$0 \leqslant k \leqslant 25$; $5{\cdot}k \equiv 1 \pmod{26}$
vaut 21.

2. On donne les matrices :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \;;\; B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \;;\; X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;;\; Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer la matrice : $6A-A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme :
$A^{-1} = \alpha{\cdot}I + \beta{\cdot}A$
où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B=5{\cdot}A^{-1}$

d. Démontrer que si $A{\cdot}X=Y$ alors $5{\cdot}X=B{\cdot}Y$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot "*ET*", en utilisant le procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y=A{\cdot}X$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple :

"*Ou*" *(mot à coder)* $\rightsquigarrow X\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightsquigarrow Y=\begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow R=\begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ "*YE*" *(mot codé)*

Partie C : procédure de décodage *(on conserve les mêmes notations que pour le codage)*

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y=A{\cdot}X$

1. Démontrer que : $\begin{cases} 5{\cdot}x_1 = 2{\cdot}y_1 - y_2 \\ 5{\cdot}x_2 = -3{\cdot}y_1 + 4{\cdot}y_2 \end{cases}$

2. En utilisant la question 1. b. de la partie **A**, établir que :
$\begin{cases} x_1 \equiv 16{\cdot}y_1 + 5{\cdot}y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 15{\cdot}y_1 + 6{\cdot}y_2 \pmod{26} \end{cases}$

3. Décoder le mot "*QP*".

Exercice 6938

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M=\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a

et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a-5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.
Ainsi : $\det(M)=3a-5b$

1. Dans cette question, on suppose que $\det(M)\neq 0$ et on pose :
$$N=\frac{1}{\det(M)}\cdot\begin{pmatrix}3 & -b\\ -5 & a\end{pmatrix}.$$
Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M)=3$
On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\,;b)$ solutions de l'équation (E).

   a. Vérifier que le couple $(6\,;3)$ est une solution de (E).

   b. Montrer que le couple d'entiers $(a\,;b)$ est solution de (E) si, et seulement si, $3\cdot(a-6)=5\cdot(b-3)$
   En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose : $Q=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}$
En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. **Codage avec la matrice Q**

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, on utilise la procéudre ci-après :

- **Etape 1 :** On associe au mot la matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- **Etape 2 :** La matrice X est transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ telle que $Y=Q\cdot X$.

- **Etape 3 :** La matrice Y est transformée en la matrice $R=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

- **Etape 4 :** A la matrice $R=\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}$, on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

Exemple : $JE\mapsto X=\begin{pmatrix}9\\ 4\end{pmatrix}\mapsto Y=\begin{pmatrix}66\\ 57\end{pmatrix}\mapsto R=\begin{pmatrix}14\\ 5\end{pmatrix}\mapsto OF$
Le mot JE est codé en le mot OE.

Coder le mot DO.

3. **Procédure de décodage**

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y=Q\cdot X$.

   a. Démontrer que $3X=3\cdot Q^{-1}\cdot Y$ puis que :
   $$\begin{cases}3\cdot x_1\equiv 3\cdot r_1-3\cdot r_2 & (\text{mod. }26)\\ 3\cdot x_2\equiv -5\cdot r_1+6\cdot r_2 & (\text{mod. }26)\end{cases}$$

   b. En remarquant que $9\times 3\equiv 1\ (\text{mod. }26)$, montrer que :
   $$\begin{cases}x_1\equiv r_1-r_2 & (\text{mod. }26)\\ x_2\equiv 7\cdot r_1+2\cdot r_2 & (\text{mod. }26)\end{cases}$$

   c. Décoder le mot SG.

Exercice 6940

On dispose de deux urnes U et V contenant chacune deux boules. Au départ, l'urne U contient deux boules blanches et l'urne V contient deux boules noires.
On effectue des tirages successifs dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à prendre au hasard, de manière simultanée, une boule dans chaque urne et à la mettre dans l'autre urne.
Pour tout entier naturel n non nul, on note $\mathcal{X}_n$ la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U à la fin du n-ième tirage.

1. a. Traduire par une phrase la probabilité :
$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=1)}(\mathcal{X}_{n+1}=1)$
puis déterminer les probabilités conditionnelles suivantes :
$\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=0)}(\mathcal{X}_{n+1}=1)$; $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=1)}(\mathcal{X}_{n+1}=1)$; $\mathcal{P}_{(\mathcal{X}_n=2)}(\mathcal{X}_{n+1}=1)$

   b. Exprimer $\mathcal{P}(\mathcal{X}_{n+1}=1)$ en fonction de $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=0)$, $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=1)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=2)$

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n la matrice ligne défiie par :
$R_n=\begin{pmatrix}\mathcal{P}(\mathcal{X}_n=0) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=1) & \mathcal{P}(\mathcal{X}_n=2)\end{pmatrix}$

et on considère M la matrice : $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

On note R_0 la matrice ligne $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On admettra par la suite que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$R_{n+1}=R_n\cdot M$

Déterminer R_1 et justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$R_n=R_0\cdot M^n$.

3. On admet que $M=P\cdot D\cdot P^{-1}$ avec :
$$P=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\ ;\ D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$
Etablir que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $M^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$.

On admettra que, pour tout entier naturel :
$$D^n=\begin{pmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

4. a. Calculer $D^n\cdot P^{-1}$ en fonction de n.

b. Sachant que $R_0 \cdot P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$, déterminer les coefficients de R_n en fonction de n.

5. Déterminer :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = 0)$, $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = 1)$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \mathcal{P}(\mathcal{X}_n = 2)$.
Interpréter ces résultats.

Exercice 6942

Le but de cet exercice est d'étudier, sur un exemple, une méthode de chiffrement publiée en 1929 par le mathématicien et cryptologue Lester Hill. Ce chiffrement repose sur la donnée d'une matrice A, connue uniquement de l'émetteur et du destinataire.

Dans tout l'exercice, on note A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Partie A - Chiffrement de Hill

Voici les différents étapes de chiffrement pour un mot comportant un nombre pair de lettres :

- **Etape 1 :**
On divise le mot en blocs de deux lettres consécutives puis, pour chaque bloc, on effectue chacune des étapes suivantes.

- **Etape 2 :**
On associe aux deux lettres du bloc les deux entiers x_1 et x_2 tous deux compris entre 0 et 25, qui correspondent aux deux lettres dans le même ordre, dans le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- **Etape 3 :**

On transforme la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

vérifiant $Y = A \cdot X$.

- **Etape 4 :**

On transforme la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$,

où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 celui de la division euclidienne de y_2 par 26.

- **Etape 5 :**
On associe aux entiers r_1 et r_2 les deux lettres correspondantes du tableau de l'étape 2.
Le bloc chiffré est le bloc obtenu en juxtaposant ces deux lettres.

Question : utiliser la méthode de chiffrement exposée pour chiffrer le mot "*HILL*".

Partie B - Quelques outils mathématiques nécessaire au déchiffrement

1. Soit a un entier relatif premier avec 26.
Démontrer qu'il existe un entier relatif u tel que :
$u \times a \equiv 1 \pmod{26}$.

2. On considère la fonction `f` d'un algorithme prenant pour argument un entier naturel `a` premier avec 26.

```
Fonction f(a)
    u ← 0
    r ← 0
    Tant que r≠1
        u ← u+1
        r ← reste de la division euclidienne
                de u×a par 26
    Fin du Tant que
    Renvoyer u
```

On appelle la fonction `f` avec la valeur du paramètre `a=21`.

a. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant, avec les différentes valeurs prises par les variables `u` et `v` lors de l'appel à la fonction `f`.

u	0	1	2	...
r	0	21	...	...

b. En déduire que : $5 \times 21 \equiv 1 \pmod{26}$.

3. On rappelle que A est la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ et on note

I la matrice : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer la matrice : $12 \cdot A - A^2$.

b. En déduire la matrice B telle que : $B \cdot A = 21 \cdot I$

c. Démontrer que si $A \cdot X = Y$ alors $21 \cdot X = B \cdot Y$.

Partie C - Déchiffrement

On veut déchiffrer le mot $VLUP$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ la matrice associée, selon le tableau de correspondance, à un bloc de deux lettres avant chiffrement, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la matrice définie par l'égalité :

$$Y = A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \cdot X$$

Si r_1 et r_2 sont les restes respectifs de y_1 et y_2 dans la division euclidienne par 26, le bloc de deux lettres après chiffrement est associé à la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 21 \cdot x_1 = 7 \cdot y_1 - 2 \cdot y_2 \\ 21 \cdot x_2 = -7 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \end{cases}$

2. En utilisant la question **B** 2., établir que :
$\begin{cases} x_1 \equiv 9 \cdot r_1 + 16 \cdot r_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 17 \cdot r_1 + 25 \cdot r_2 \pmod{26} \end{cases}$

3. Déchiffrer le mot VLUP, associé aux matrices $\begin{pmatrix} 21 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

Exercice 6948

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n, la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décisition d'arrêter de fumer.

On suppose que $p_0=0$ et $q_0=1$.

1. Calculer p_1 et q_1.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	1
3	1			
4	2			
5	3			

Dans la colonne **A** figurent les valeurs de l'entier naturel n.
Quelles formules peut-on écrire dans les cellules `B3` et `C3` de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes `B` et `C` les termes successifs des suites (p_n) et (q_n)?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par :
$$M=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}1 & 0{,}6\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_n=\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}$$
On admet que $X_{n+1}=M\cdot X_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n=M^n\cdot X_0$

On définit les matrices A et B par :
$$A=\begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}8\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix}0{,}2 & -0{,}8\\ -0{,}2 & 0{,}8\end{pmatrix}$$

 a. Démontrer que : $M=A+0{,}5\cdot B$

 b. Vérifier que $A^2=A$ et que :
$$A\cdot B=B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

 On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif :
 $A^n=A$; $B^n=B$

 c. Démontrer que, pour tout entier naturel :
 $M^n=A+0{,}5^n\cdot B$

 d. En déduire, que pour tout entier naturel n :
 $p_n=0{,}8-0{,}8\times 0{,}5^n$

 e. A long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer?

Exercice 6949

On donne les matrices :
$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne :
$$M^3=\begin{pmatrix}20 & 10 & 11\\ 12 & 2 & 9\\ 42 & 20 & 21\end{pmatrix}$$

2. Vérifier que : $M^3=M^2+8\cdot M+6\cdot I$

3. En déduire que M est inversible et que :
$$M^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\big(M^2-M-8\cdot I\big).$$

Partie B : Etude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ passe par les points :
$A(1\,;1)$; $B(-1\,;-1)$; $C(2\,;5)$

1. Démontrer que le problème à chercher trois entiers a, b et c tels que :
$$M\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 5\end{pmatrix}$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C : Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.
Dans un repère $\big(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\big)$, on considère les points $A(1\,;p)$, $B(-1\,;q)$ et $C(2\,;r)$.
On cherche les valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation :
$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=M^{-1}\cdot\begin{pmatrix}p\\ q\\ r\end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors :
$$\begin{cases}-3p+q+2r\equiv 0 \pmod{6}\\ 3p-3q\equiv 0 \pmod{6}\\ 6p+2q-2r\equiv 0 \pmod{6}\end{cases}$$

2. En déduire que : $\begin{cases}q-r\equiv 0 \pmod{3}\\ p-q\equiv 0 \pmod{2}\end{cases}$

3. Réciproquement, on admet que si :
$$\begin{cases}q-r\equiv 0 \pmod{3}\\ p-q\equiv 0 \pmod{2}\\ A,\ B,\ C \text{ ne sont pas alignés}\end{cases}$$
alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équations :
$y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$
passe par les points A, B et C.

 a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si, et seulement si : $2\cdot r+q-3\cdot p=0$.

 b. On choisit $p=7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$ passe par les points A, B et C.