

# Terminales S - Spécialité/Annales sur le PGCD

## 1. PGCD, propriété et congruence :

### Exercice 5284



- Montrer que  $3n^3 - 11n + 48$  est divisible par  $n + 3$  pour tout entier naturel  $n$ .
  - Montrer que  $3n^2 - 9n + 16$  est un entier naturel non nul pour tout entier naturel  $n$ .
- Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls  $a$ ,  $b$  et  $c$ , l'égalité suivante est vraie :  $\text{pgcd}(a; b) = \text{pgcd}(b \cdot c - a; b)$
- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , supérieur ou égal à 2, l'égalité est vraie :  $\text{pgcd}(3n^3 - 11n; n + 3) = \text{pgcd}(48; n + 3)$
- Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.
  - En déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3}$  soit un entier naturel.

### Exercice 5285



Les suites d'entiers naturels  $(x_n)$  et  $(y_n)$  sont définies par :

- $x_0 = 3$  ;  $x_{n+1} = 2 \cdot x_n - 1$
- $y_0 = 1$  ;  $y_{n+1} = 2 \cdot y_n + 3$

- Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $x_n = 2^{n+1} + 1$
- Calculer le PGCD de  $x_8$  et  $x_9$ , puis celui de  $x_{2002}$  et  $x_{2003}$ .  
Que peut-on en déduire pour  $x_8$  et  $x_9$  d'une part, pour  $x_{2002}$  et  $x_{2003}$  d'autre part?
  - $x_n$  et  $x_{n+1}$  sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel  $n$ ?
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $2 \cdot x_n - y_n = 5$
  - Exprimer  $y_n$  en fonction de  $n$ .
  - En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel  $p$  le reste de la division euclidienne de  $2^p$  par 5.
  - On note  $d_n$  le PGCD de  $x_n$  et de  $y_n$  pour tout entier naturel  $n$ .

Démontrer que l'on a  $d_n = 1$  ou  $d_n = 5$ ; en déduire l'ensemble des entiers naturels  $n$  tels que  $x_n$  et  $y_n$  soient premiers entre eux.

### Exercice 3320



On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n$$

- Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .  
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$ ?
- Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $k$  :  $u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$  et  $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$
- Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  :  $2 \cdot u_n = 5^{n+2} + 3$ .
  - En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .
- Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .
- Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant.  
Préciser sa valeur.

### Exercice 3719



#### Partie A

On admet que 1999 est un entier premier. Déterminer l'ensemble des couples  $(a; b)$  d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1999.

#### Partie B

On considère l'équation  $(E)$  d'inconnu  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$  :

$$(E) : n^2 - S \cdot n + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de  $S$  telle que  $(E)$  admette deux solutions dans  $\mathbb{N}$ .

- Peut-on déterminer un entier  $S$  tel que 3 soit solution de  $(E)$ ?  
Si oui, préciser la deuxième solution.

2. Peut-on déterminer un entier  $S$  tel que 5 soit solution de  $(E)$ ?

3. Montrer que tout entier  $n$  solution de  $(E)$  est un diviseur de 11 994.

En déduire toutes les valeurs possibles de  $S$  telles que  $(E)$  admette deux solutions entières.

### Partie C

Comment montrerait-on que 1 999 est un entier premier?

Préciser le raisonnement employé?

La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19  
 23 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59  
 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97

#### Exercice 3246



Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :

“Etant donnés deux entiers naturels,  $a$  et  $b$  non nuls, si  $\text{pgcd}(a; b) = 1$  alors  $\text{pgcd}(a^2; b^2) = 1$ ”

## 2. Théorème de Bezout :

#### Exercice 3226



Dans cet exercice,  $a$  et  $b$  désignent des entiers strictement positifs.

1. a. Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $a \cdot u + b \cdot v = 1$  alors les entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

b. En déduire que si  $(a^2 + a \cdot b - b^2)^2 = 1$ , alors  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs  $(a; b)$  tels que  $(a^2 + a \cdot b - b^2)^2 = 1$ . Un tel couple sera appelé solution.

a. Déterminer  $a$  lorsque :  $a = b$ .

b. Vérifier que  $(1; 1)$ ,  $(2; 3)$  et  $(5; 8)$  sont trois solutions particulières.

c. Montrer que si  $(a; b)$  est solution et si  $a < b$ , alors :  $a^2 - b^2 < 0$ .

3. a. Montrer que si  $(x; y)$  est une solution différente de  $(1; 1)$  alors  $(y - x; x)$  et  $(y; y + x)$  sont aussi des solutions.

b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de entiers entiers strictement positifs  $(a_n)_n$  définie par  $a_0 = a_1 = 1$  et pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 0$  :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Démontrer que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $(a_n; a_{n+1})$  est so-

Une suite  $(S_n)$  est définie pour  $n > 0$  par :  $S_n = \sum_{p=1}^n p^3$ .

On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , le plus grand commun diviseur de  $S_n$  et  $S_{n+1}$ .

1. Démontrer que, pour tout  $n > 0$ , on a :  $S_n = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

2. Etude du cas où  $n$  est pair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k$

a. Démontrer que :

$$\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1}) = (2k + 1)^2 \cdot \text{pgcd}(k^2; (k+1)^2).$$

b. Calculer :  $\text{pgcd}(k; k+1)$ .

c. Calculer :  $\text{pgcd}(S_{2k}; S_{2k+1})$ .

3. Etude du cas où  $n$  est impair. Soit  $k$  l'entier naturel non nul tel que  $n = 2k+1$ .

a. Démontrer que les entiers  $2k+1$  et  $2k+3$  sont premiers entre eux.

b. Calculer :  $\text{pgcd}(S_{2k+1}; S_{2k+2})$ .

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de  $n$ , que l'on déterminera, pour laquelle  $S_n$  et  $S_{n+1}$  sont premiers entre eux.

lution.

En déduire que les entiers  $a_n$  et  $a_{n+1}$  sont premiers entre eux.

#### Exercice 3741



1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $k$  et pour tout entier naturel  $x$  :

$$(x - 1) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1}) = x^k - 1$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier  $a$  supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $d$  un diviseur positif de  $n$  :

$$n = d \cdot k$$

Montrer que  $a^d - 1$  est un diviseur de  $a^n - 1$ .

b. Déduire de la question précédente que  $2^{2004} - 1$  est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls et  $d$  leur  $\text{pgcd}$ .

a. On définit  $m'$  et  $n'$  par  $m = d \cdot m'$  et  $n = d \cdot n'$ . En appliquant le théorème de Bezout à  $m'$  et  $n'$ , montrer qu'il existe des entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :

$$m \cdot u - n \cdot v = d.$$

b. On suppose  $u$  et  $v$  strictement positifs.

$$\text{Montrer que : } (a^{m \cdot u} - 1) - (a^{n \cdot v} - 1) \cdot a^d = a^d - 1$$

Montrer ensuite que  $a^d - 1$  est le  $\text{pgcd}$  de :

$$a^{m \cdot u} - 1 \quad \text{et} \quad a^{n \cdot v} - 1$$

c. Calculer, en utilisant le résultat précédent le  $\text{pgcd}$  de :  $2^{63} - 1$  et  $2^{60} - 1$

## 4. Equation diophantienne :

### Exercice 3198



#### Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

#### Partie B

Il s'agit de résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système :

$$(S) \begin{cases} n \equiv 13 \pmod{19} \\ n \equiv 6 \pmod{12} \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tel que :

$$19u + 12v = 1$$

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple)

Vérifier que le nombre  $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$  est une solution de  $(S)$  pour un tel couple.

2. a. Soit  $n_0$  une solution de  $(S)$ , vérifier que le système  $(S)$  équivaut à :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$$

- b. Démontrer que le système  $\begin{cases} n \equiv n_0 \pmod{19} \\ n \equiv n_0 \pmod{12} \end{cases}$  équivaut à :  $n \equiv n_0 \pmod{12 \times 19}$ .

3. a. Trouver un couple  $(u; v)$  solution de l'équation  $19u + 12v = 1$  et calculer la valeur de  $N$  correspondante.

- b. Déterminer l'ensemble des solutions de  $(S)$  (on pourra utiliser la question 2. b.).

4. Un entier naturel  $n$  est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise  $n$  par  $228 = 12 \times 19$ . Quel est le reste  $r$  de cette division ?

### Exercice 3258



On rappelle que 2003 est un entier premier.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :  $123u + 2003v = 1$

- b. En déduire un entier relatif  $k_0$  tel que :  $123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}$

- c. Montrer que, pour tout entier relatif  $x$ ,  $123x \equiv 456 \pmod{2003}$  si, et seulement si,  $x \equiv 456k_0 \pmod{2003}$

- d. Montrer qu'il existe un unique entier  $n$  tel que :  $1 \leq n \leq 2002$  et  $123n \equiv 456 \pmod{2003}$

2. Soit  $a$  un entier tel que :  $1 \leq a \leq 2002$

- a. Déterminer :  $\text{pgcd}(a; 2003)$

En déduire qu'il existe un entier  $m$  tel que :  $a \cdot m \equiv 1 \pmod{2003}$

- b. Montrer que, pour tout entier  $b$ , il existe un unique entier  $x$  tel que :  $0 \leq x \leq 2002$  ;  $a \cdot x \equiv b \pmod{2003}$

### Exercice 3256



Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle  $x$  :

$$78x^3 + u \cdot x^2 + v \cdot x - 14 = 0$$

où  $u$  et  $v$  sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que  $\frac{14}{39}$  est solution de l'équation (1).

- a. Prouver que les entiers relatifs  $u$  et  $v$  sont liés par la relation :

$$14u + 39v = 1129$$

- b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple  $(x; y)$  d'entiers relatifs vérifiant l'équation :

$$14x + 39y = 1$$

Vérifier que le couple  $(-25; 9)$  est solution de cette équation.

- c. En déduire un couple  $(u_0; v_0)$  solution particulière de l'équation :

$$14u + 39v = 1129$$

Donner la solution générale de cette équation, c'est à dire l'ensemble des couples  $(u; v)$  d'entiers relatifs qui la vérifient.

- d. Déterminer, parmi les couples  $(u; v)$  précédents, celui pour lequel l'entier  $u$  est l'entier naturel le plus petit possible.

2. a. Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

- b. Soit  $\frac{P}{Q}$  une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue  $x$  :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0 \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont des entiers relatifs.}$$

Montrer que si  $P$  et  $Q$  sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors  $P$  divise 14 et  $Q$  divise 78.

- c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

### Exercice 3477



Les parties A et B sont indépendantes.

#### Partie A

On considère l'équation  $(E)$  :  $7x - 6y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers naturels.

1. Donner une solution particulière de l'équation  $(E)$ .
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels solutions de l'équation  $(E)$ .

#### Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples  $(n; m)$  d'entiers naturels non nul vérifiant la relation :

$$7^n - 3 \times 2^m = 1 \quad (F)$$

1. On suppose  $m \leq 4$ .  
Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.
2. On suppose maintenant que  $m \geq 5$ .
  - a. Montrer que si le couple  $(n; m)$  vérifie la relation  $(F)$  alors :  
 $7^n \equiv 1 \pmod{32}$
  - b. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple  $(n; m)$  vérifie la relation  $(F)$  alors  $n$  est divisible par 4.
  - c. En déduire que si le couple  $(n; m)$  vérifie la relation  $(F)$  alors :  $7^n \equiv 1 \pmod{5}$ .
  - d. Pour  $m \geq 5$ , existe-t-il des couples  $(n; m)$  d'entiers naturels vérifiant la relation  $(F)$ ?
3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation  $(F)$ .

### Exercice 3905



Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

1. On considère l'équation notée  $(E)$  :  
 $3x + 7y = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Déterminer un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs tels que :  
 $3 \cdot u + 7 \cdot v = 1$   
En déduire une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de l'équation  $(E)$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de  $(E)$ .
2. On considère l'équation notée  $(G)$  :  
 $3x^2 + 7y^2 = 10^{2n}$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
  - a. Montrer que :  $100 \equiv 2 \pmod{7}$ .  
Démontrer que si  $(x; y)$  est solution de  $(G)$  alors :  
 $3x^2 \equiv 2^n \pmod{7}$ .
  - b. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Reste de la division euclidienne de $x$ par 7	0	1	2	3	4	5	6
Reste de la division euclidienne de $3x^2$ par 7							

- c. Démontrer que  $2^n$  est congru à 1, 2 ou 4 modulo 7.  
En déduire que l'équation  $(G)$  n'admet pas de solution.

## 5. Problème de codage :

### Exercice 5456



#### Partie A : Restitution organisée de connaissance

Soit  $a, b, c, d$  des entiers relatifs et  $n$  un entier naturel non nul.

Montrer que si  $a \equiv b \pmod{n}$  et si  $c \equiv d \pmod{n}$  alors

### Exercice 5432



#### Partie A - Restitution organisée des connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

##### Théorème de Bézout :

Deux entiers relatifs  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe un couple  $(u; v)$  d'entiers relatifs vérifiant  $a \cdot u + b \cdot v = 1$ .

##### Théorème de Gauss :

Soient  $a, b, c$  des entiers relatifs.  
Si  $a$  divise le produit  $b \cdot c$  et si  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, alors  $a$  divise  $c$ .

1. En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.
2. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels tels que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.  
Déduire du théorème de Gauss que, si  $a$  est un entier relatif, tel que  $a \equiv 0 \pmod{p}$  et  $a \equiv 0 \pmod{q}$ , alors  $a \equiv 0 \pmod{pq}$ .

#### Partie B

On se propose de déterminer l'ensemble  $\mathcal{S}$  des entiers relatifs  $n$  vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de  $\mathcal{S}$ .  
On désigne par  $(u; v)$  un couple d'entiers relatifs tels que :  
 $17 \cdot u + 5 \cdot v = 1$ 
  - a. Justifier l'existence d'un tel couple  $(u; v)$ .
  - b. On pose :  $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$ .  
Démontrer que  $n_0$  appartient à  $\mathcal{S}$ .
  - c. Donner un exemple d'entier  $n_0$  appartenant à  $\mathcal{S}$ .
2. Caractérisation des éléments de  $\mathcal{S}$ .
  - a. Soit  $n$  un entier relatif appartenant à  $\mathcal{S}$ .  
Démontrer que :  $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$ .
  - b. En déduire qu'un entier relatif  $n$  appartient à  $\mathcal{S}$  si, et seulement, si il peut s'écrire sous la forme  $n = 43 + 85k$  où  $k$  est un entier relatif.
3. Application.  
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons.  
Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.  
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.  
Combien a-t-elle de jetons?

$$ac \equiv bd \pmod{n}.$$

#### Partie B : Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation :  $(E)$  :  $23x - 26y = 1$  où  $x$  et  $y$  désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple  $(-9; -8)$  est solution de l'équation

(E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire un entier  $a$  tel que :  
 $0 \leq a \leq 25$  ;  $23a \equiv 1 \pmod{26}$

### Partie C : Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

● **Etape 1** Chaque lettre du mot est remplacé par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers  $(x_1 ; x_2)$  où  $x_1$  correspond à la première lettre du mot et  $x_2$  correspond à la deuxième lettre du mot.

● **Etape 2**  $(x_1 ; x_2)$  est transformé en  $(y_1 ; y_2)$  tel que :

$$(\mathcal{S}_1) : \begin{cases} y_1 \equiv 11x_1 + 3x_2 \pmod{26} \\ y_2 \equiv 7x_1 + 4x_2 \pmod{26} \end{cases}$$

avec  $0 \leq y_1 \leq 25$  et  $0 \leq y_2 \leq 25$

● **Etape 3**  $(y_1 ; y_2)$  est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple :

$$\underbrace{\text{TE}}_{\text{mot en clair}} \xrightarrow{\text{étape 1}} (19 ; 4) \xrightarrow{\text{étape 2}} (13 ; 19) \xrightarrow{\text{étape 3}} \underbrace{\text{NT}}_{\text{mot codé}}$$

1. Coder le mot  $ST$ .

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage :

a. Montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(\mathcal{S}_1)$ , vérifie les équations du système :

$$(\mathcal{S}_2) : \begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2 \pmod{26} \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

b. A l'aide de la partie B, montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(\mathcal{S}_2)$ , vérifie les équations du système :

$$(\mathcal{S}_3) : \begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2 \pmod{26} \end{cases}$$

c. Montrer que tout couple  $(x_1 ; x_2)$  vérifiant les équations du système  $(\mathcal{S}_3)$ , vérifie les équations du système  $(\mathcal{S}_1)$ .

d. Décoder le mot  $YJ$

## 6. Arithmétique et géométrie :

### Exercice 3264



1. a. Soit  $p$  un entier naturel. Montrer que l'un des trois entiers  $p$ ,  $p+10$  et  $p+20$ , et un seulement est divisible par 3.

b. Les entiers naturels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois entiers sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit  $E$  l'ensemble des triplets d'entiers relatifs  $(u ; v ; w)$  tels que :

$$3 \cdot u + 13 \cdot v + 23 \cdot w = 0$$

a. Montrer que pour un tel triplet :  $v \equiv w \pmod{3}$

b. On pose  $v = 3k+r$  et  $w = 3k'+r$  où  $k$ ,  $k'$  et  $r$  sont des entiers relatifs et  $0 \leq r \leq 2$ .

Montrer que les éléments de  $E$  sont de la forme :

$$(-13k - 23k' - 12r ; 3k+r ; 3k'+r)$$

c. L'espace est rapporté à un repère orthonormé d'origine  $O$  et soit  $P$  le plan d'équation  $3x+13y+23z=0$ .

Déterminer l'ensemble des points  $M$  à coordonnées  $(x ; y ; z)$  entières relatives appartenant au plan  $P$  et situés à l'intérieur du cube de centre  $O$ , de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

## 7. Arithmétique et suite :

### Exercice 3254



On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$  ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}.$$

En déduire que pour tout entier naturel  $k$  :

$$u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{et} \quad u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}.$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$2u_n = 5^{n+2} + 3.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :

$$2u_n \equiv 28 \pmod{100}.$$

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

5. Montrer que le *PGCD* de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant. Préciser sa valeur.

### Exercice 3574



1. Calculer le *PGCD* de  $4^5-1$  et de  $4^6-1$ .

Soit  $u$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5 \cdot u_{n+1} - 4 \cdot u_n \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

2. Calculer les termes  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  de la suite  $u$ .
3. a. Montrer que la suite  $u$  vérifie, pour tout entier naturel  $n$  :
- $$u_{n+1} = 4 \cdot u_n + 1$$
- b. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est un entier naturel.
- c. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , le *PGCD* de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .

4. Soit  $v$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = u_n + \frac{1}{3}$$

- a. Montrer que  $v$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_0$ .
- b. Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer, pour tout entier naturel  $n$ , le *PGCD* de  $4^{n+1}-1$  et de  $4^n-1$ .

### Exercice 6252



On considère la fonction  $f$  d'un algorithme prenant pour argument deux entiers naturels  $A$  et  $B$  vérifiant  $A < B$  :

```

Fonction f(A,B)
  D ← B-A
  Tant que D>0
    B ← de A
    A ← de D
    Si B>A
      Alors
        D ← de B-A
      Sinon
        D ← de A-B
  Fin Si
  Fin Tant que
  Renvoyer A
  
```

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice 1604



Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point,

**Proposition 1 :** Pour tout entier naturel  $n$ , 3 divise le nombre entier  $2^{2n} - 1$

**Proposition 2 :** Si un entier relatif  $x$  est solution de l'équation  $x^2+x \equiv 0 \pmod{6}$  alors  $x \equiv 0 \pmod{3}$

1. On appelle la fonction  $f$  avec pour valeurs des arguments :  $A=12$  et  $B=14$ .

On complétera le tableau ci-dessous en y indiquant les valeurs successives prises par les variables  $A$ ,  $B$  et  $D$  au cours de l'appel à cette fonction.

A	B	D
12	14	

2. L'appel à la fonction  $f$  calcule la valeur du *PGCD* des nombres  $A$  et  $B$ .  
En entrant  $A=221$  et  $B=331$ , l'appel à la fonction  $f$  renvoie la valeur 1.

- a. justifier qu'il existe des couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation :
- $$(E) : 221 \cdot x - 331 \cdot y = 1$$

- b. Vérifier que le couple  $(3; 2)$  est une solution de l'équation  $(E)$ .  
En déduire l'ensemble des couples  $(x; y)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation  $(E)$ .

3. On considère les suites d'entiers naturels  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier naturel  $n$  par :

$$u_n = 2 + 221 \cdot n \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}$$

- a. Exprimer  $v_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ .
- b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels  $(p; q)$  tels que :

$$u_p = v_q \quad ; \quad 0 \leq p \leq 500 \quad ; \quad 0 \leq q \leq 500$$

**Proposition 3 :** L'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de l'équation  $12 \cdot x - 5 \cdot y = 3$  est l'ensemble des couples  $(4+10 \cdot k; 9+24 \cdot k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$

**Proposition 4 :** Il existe un seul couple  $(a; b)$  de nombres entiers naturels, tel que :

$$a < b \text{ et } PPCM(a; b) - PGCD(a; b) = 1$$

Deux entiers naturels  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.

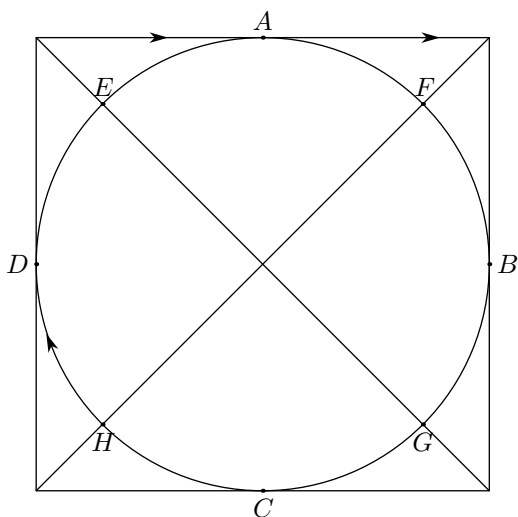
**Proposition 5 :** Si l'entier  $M$  est divisible par 27 alors l'entier  $M-N$  est aussi divisible par 27.

**Exercice 3133**



1. On considère l'équation :  $(\mathcal{E}) : 17x - 24y = 9$  où  $(x; y)$  est un couple d'entiers relatifs.
  - a. Vérifier que le couple  $(9; 6)$  est solution de l'équation  $(\mathcal{E})$ .
  - b. Résoudre l'équation  $(\mathcal{E})$ .

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle. Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à la vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes. Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés  $A, B, C$  et  $D$  sur le dessin. A l'instant  $t=0$ , Jean part du point  $H$  en même temps que le pompon part du point  $A$ .



- a. On suppose qu'à un certain instant  $t$  Jean attrape le pompon en  $A$ . Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en  $A$  sans y trouver le pompon. A l'instant  $t$ , on note  $y$  le nombre de tours effectués depuis son premier passage en  $A$  et  $x$  le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que  $(x; y)$  est solution de l'équation  $(\mathcal{E})$  de la question 1.
- b. Jean a payé pour 2 minutes; aura-t-il le temps d'attraper le pompon?
- c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point  $A$ .
- d. Jean part maintenant du point  $E$ . Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en  $A$  avant les deux minutes.

**Exercice 6249**



**Partie A**

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des entiers premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini d'entiers premiers notés  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . On considère l'entier  $E$  produit de tous les entiers premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$$

Démontrer que  $E$  est un entier supérieur ou égal à 2, et que  $E$  est premier avec chacun des entiers  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

2. En utilisant le fait que  $E$  admet un diviseur premier, conclure.

**Partie B**

Pour tout entier naturel  $k \geq 2$ , on pose :  $M_k = 2^k - 1$ . On dit que  $M_k$  est le  $k$ -ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de  $M_k$  :

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M_k$									

- b. D'après le tableau précédent, si  $k$  est un entier premier, peut-on conjecturer que l'entier  $M_k$  est premier?
2. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls.
  - a. Justifier l'égalité :
 
$$1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$
  - b. En déduire que  $2^{p^q} - 1$  est divisible par  $2^p - 1$ .
  - c. En déduire que si un entier  $k$  supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors  $M_k$  ne l'est pas non plus.
3. a. Prouver que le nombre de Mersenne  $M_{11}$  n'est pas premier.
  - b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b.?

**Partie C**

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0=4$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2$$

Si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que l'entier  $M_n$  est premier si, et seulement si,  $u_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_n}$ .

Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne  $M_5$  est premier.
2. La fonction de l'algorithme suivant prend pour argument un entier  $n$  supérieur ou égal à 3 et doit renvoyer 1 si le nombre de Mersenne  $M_n$  est premier et 0 sinon, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

```

Fonction f(n)
  u ← 4
  M ← ...
  Pour i allant de 1 à ...
    u ← ...
  Fin Pour
  Si M divise u
    Alors
      Renvoyer .....
    Sinon
      Renvoyer .....
  Fin Si
    
```

Recopier et compléter le code de la fonction  $f$  de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

### Exercice 3552



#### Partie I

Soit  $x$  un nombre réel.

- Montrer que :  $x^4+4=(x^2+2)^2-4x^2$ .
- En déduire que  $x^4+4$  peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

#### Partie II

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers :  $A=n^2-2n+2$  ;  $B=n^2+2n+2$  et  $d$  leur PGCD.

- Montrer que  $n^4+4$  n'est pas premier.
- Montrer que, tout diviseur de  $A$  qui divise  $n$ , divise 2.
- Montrer que, tout diviseur commun de  $A$  et de  $B$ , divise  $4n$ .
- Dans cette question, on suppose que  $n$  est impair.
  - Montrer que  $A$  et  $B$  sont impairs. En déduire que  $d$  est impair.
  - Montrer que  $d$  divise  $n$ .
  - En déduire que  $d$  divise 2, puis que  $A$  et  $B$  sont premiers entre eux.
- On suppose maintenant que  $n$  est pair.
  - Montrer que 4 ne divise pas  $n^2-2n+2$ .
  - Montrer que  $d$  est de la forme  $d=2\cdot p$ , où  $p$  est impair.
  - Montrer que  $p$  divise  $n$ . En déduire que  $d=2$ . (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4.).

### Exercice 6928



Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on appelle  $S(n)$  le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de  $n$ .

- Vérifier que  $S(6)=12$  et calculer  $S(7)$ .
- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $S(n) \geq 1+n$
  - Quels sont les entiers naturels  $n$  tels que  $S(n)=1+n$ ?
- On suppose dans cette question que  $n$  s'écrit  $p \times q$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers distincts.
  - Démontrer que :  $S(n)=(1+p)(1+q)$ .
  - On considère la proposition suivante :  
 "Pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$  non nuls distincts,  
 $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ "  
 Cette proposition est-elle vraie ou fausse? Justifier.
- On suppose dans cette question que l'entier  $n$  s'écrit  $p^k$ , où  $p$  est un entier premier et  $k$  un entier entier naturel non nul.
  - Quels sont les diviseurs de  $n$ ?
  - En déduire que :  $S(n) = \frac{1-p^{k+1}}{1-p}$ .

- On suppose dans cette question que  $n$  s'écrit  $p^{13} \times q^7$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers premiers distincts.

- Soit  $m$  un entier naturel.  
Démontrer que  $m$  divise  $n$  si, et seulement si, il existe deux entiers  $s$  et  $t$  avec  $0 \leq s \leq 13$  et  $0 \leq t \leq 7$  tels que  $m = p^s \times q^t$ .
- Démontrer que :  $S(n) = \frac{1-p^{14}}{1-p} \times \frac{1-q^8}{1-q}$

### Exercice 6946



Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls  $(a; b)$ , on note  $\text{pgcd}(a; b)$  le plus grand diviseur commun de  $a$  et  $b$ .

Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- Exemple. Soit  $\Delta_1$  la droite d'équation :  $y = \frac{5}{4} \cdot x - \frac{2}{3}$ 
  - Montrer que si  $(x; y)$  est un couple d'entiers relatifs alors l'entier  $15 \cdot x - 12 \cdot y$  est divisible par 3.
  - Existe-il au moins un point de la droite  $\Delta_1$  dont les coordonnées sont deux entiers relatifs? Justifier.

#### Généralisation :

On considère désormais une droite  $\Delta$  d'équation :

$$y = \frac{m}{n} \cdot x - \frac{p}{q}$$

où  $m, n, p$  et  $q$  sont des entiers relatifs non nuls tels que :

$$\text{pgcd}(m; n) = \text{pgcd}(p; q) = 1$$

Ainsi, les coefficients de l'équation  $(E)$  sont des fractions irréductibles et on dit que  $\Delta$  est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $m, n, p$  et  $q$  pour qu'une droite rationnelle  $\Delta$  comporte au moins un point dont les coordonnées sont deux entiers relatifs.

- On suppose ici que la droite  $\Delta$  comporte un point de coordonnées  $(x_0; y_0)$  où  $x_0$  et  $y_0$  sont des entiers relatifs.
  - En remarquant que le nombre  $n \cdot y_0 - m \cdot x_0$  est un entier relatif, démontrer que  $q$  divise le produit  $n \cdot p$ .
  - En déduire que  $q$  divise  $n$ .
- Réciproquement, on suppose que  $q$  divise  $n$ , et on souhaite trouver un couple  $(x_0; y_0)$  d'entiers relatifs tels que :
 
$$y_0 = \frac{m}{n} \cdot x_0 - \frac{p}{q}$$
  - On pose  $n = q \cdot r$ , où  $r$  est un entier relatif non nul. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que :  

$$q \cdot r \cdot u - m \cdot v = 1$$
  - En déduire qu'il existe un couple  $(x_0; y_0)$  d'entiers relatifs tels que :  

$$y_0 = \frac{m}{n} \cdot x_0 - \frac{p}{q}$$
- Soit  $\Delta$  la droite d'équation  $y = \frac{3}{8} \cdot x - \frac{7}{4}$ . Cette droite possède-t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs? Justifier.
- On considère la fonction  $f$  d'un algorithme prenant pour argument les entiers  $M, N, P$  et  $Q$ . De plus, on suppose que les arguments passés lors de l'appel à la fonction  $f$  vérifie :  

$$\text{pgcd}(M; N) = \text{pgcd}(P; Q) = 1$$



```

Fonction f(M,N,P,Q)
  Si Q divise N
  Alors
    X ← 0
    Tant que ( $\frac{M}{N} \cdot X - \frac{P}{Q}$  n'est pas entier)
      et ( $-\frac{M}{N} \cdot X - \frac{P}{Q}$  n'est pas entier)
      X ← X+1
  Fin Tant que
  Si  $\frac{M}{N} \cdot X - \frac{P}{Q}$  est entier
  Alors
    Renvoyer  $(X; \frac{M}{N} \cdot X - \frac{P}{Q})$ 
  Sinon
    Renvoyer  $(-X; \frac{M}{N} \cdot X - \frac{P}{Q})$ 
  Fin Si
Sinon
  Renvoyer "Pas de solution"
Fin si

```

- a. Justifier que l'appel à la fonction  $f$  se termine pour toutes valeurs passées en argument de  $M, N, P, Q$ , entiers relatifs non nuls vérifiant :  
 $\text{pgcd}(M; N) = \text{pgcd}(P; Q) = 1$ .
- b. Que permet-il d'obtenir?