

# Terminales S - Spécialité/Annales sur l'arithmétique

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice 3597



Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel  $n$  dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est à dire tel que  $n^3 \equiv 2009 \pmod{10\,000}$ .

#### Partie A

- Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2009^2$  par 16.
- En déduire que:  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{16}$

#### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_0 = 2009^2 - 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ :  $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$ .

- Démontrer que  $u_0$  est divisible par 5.
  - Démontrer, en utilisant la formule du binôme de Newton, que pour tout entier naturel  $n$ :  

$$u_{n+1} = u_n \cdot \left[ u_n^4 + 5 \cdot (u_n^3 + 2 \cdot u_n^2 + 2 \cdot u_n + 1) \right]$$
  - Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est divisible par  $5^{n+1}$ .
- Vérifier que  $u_3 = 2009^{250} - 1$  puis en déduire que  $2009^{250} \equiv 1 \pmod{625}$ .
  - Démontrer alors que:  $2009^{8001} \equiv 2009 \pmod{625}$

#### Partie C

- En utilisant le théorème de Gauss et les résultats établis dans les questions précédentes, montrer que:  $2009^{8001} - 2009$  est divisible par 10 000.
- Conclure, c'est à dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

### Exercice 3631



Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

#### Partie I

Soit:  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ .  
Déterminer les paires  $\{a; b\}$  d'entiers distincts de  $E$  tels que le reste de la division euclidienne de  $ab$  par 11 soit 1.

#### Partie II

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 3.

- L'entier  $(n-1)!$  est-il pair?
- L'entier  $(n-1)!+1$  est-il divisible par un entier naturel pair?
- Prouver que l'entier  $(15-1)!+1$  n'est pas divisible par 15.
- L'entier  $(11-1)!+1$  est-il divisible par 11?

#### Partie III

Soit  $p$  un entier naturel non premier ( $p \geq 2$ ).

- Prouver que  $p$  admet un diviseur  $q$  ( $1 < q < p$ ) qui divise  $(p-1)!$
- L'entier  $q$  divise-t-il l'entier  $(p-1)!+1$ ?
- L'entier  $p$  divise-t-il l'entier  $(p-1)!+1$ ?

### Exercice 3208



Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point:

**Proposition 1:** "pour tout entier naturel  $n$ , 3 divise l'entier  $2^{2n} - 1$ ".

**Proposition 2:** "si un entier relatif  $x$  est solution de l'équation  $x^2 + x \equiv 0 \pmod{6}$  alors  $x \equiv 0 \pmod{3}$ ".

**Proposition 3:** "l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  solutions de l'équation  $12x - 5y = 3$  est l'ensemble des couples:  
 $(4+10k; 9+24k)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ ".

**Proposition 4:** "Il existe un seul couple  $(a; b)$  de nombres entiers naturels, tel que:  
 $a < b$  ;  $PPCM(a, b) - PGCD(a, b) = 1$ ".

Deux entiers naturels  $M$  et  $N$  sont tels que  $M$  a pour écriture  $abc$  en base dix et  $N$  a pour écriture  $bca$  en base dix.

**Proposition 5:** "Si l'entier  $M$  est divisible par 27 alors l'entier  $M - N$  est aussi divisible par 27".

### Exercice 3626



- On se propose, dans cette question, de déterminer tous

les entiers relatifs  $N$  tels que :

$$\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$$

- a. Vérifier que 239 est solution de ce système.
- b. Soit  $N$  un entier relatif solution de ce système. Démontrer que  $N$  peut s'écrire sous la forme :  
 $N = 1 + 17 \cdot x = 5 + 13 \cdot y$   
où  $x$  et  $y$  sont deux entiers relatifs vérifiant la relation  $17x - 13y = 4$ .
- c. Résoudre l'équation  $17 \cdot x - 13 \cdot y = 4$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
- d. En déduire qu'il existe un entier relatif  $k$  tel que :  
 $N = 18 + 221 \cdot k$ .
- e. Démontrer l'équivalence entre :  
 $N \equiv 18 \pmod{221}$  et  $\begin{cases} N \equiv 5 \pmod{13} \\ N \equiv 1 \pmod{17} \end{cases}$

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- a. Existe-t-il un entier naturel  $k$  non-nul tel que :  
 $10^k \equiv 1 \pmod{17}$ ?
- b. Existe-t-il un entier naturel  $\ell$  tel que :  
 $10^\ell \equiv 18 \pmod{221}$ ?

### Exercice 3837



Soit  $A$  l'ensemble des entiers naturels de l'intervalle  $[1; 46]$ .

1. On considère l'équation :  $(E) : 23 \cdot x + 47 \cdot y = 1$

où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- a. Donner une solution particulière  $(x_0; y_0)$  de  $(E)$ .
  - b. Déterminer l'ensemble des couples  $(x; y)$  solutions de  $(E)$ .
  - c. En déduire qu'il existe un unique entier  $x$  appartenant à  $A$  tel que :  
 $23 \cdot x \equiv 1 \pmod{47}$
2. Soient  $a$  et  $b$  deux entiers relatifs.
- a. Montrer que si  $a \cdot b \equiv 0 \pmod{47}$  alors :  
 $a \equiv 0 \pmod{47}$  ou  $b \equiv 0 \pmod{47}$
  - b. En déduire que si  $a^2 \equiv 1 \pmod{47}$  alors :  
 $a \equiv 1 \pmod{47}$  ;  $a \equiv -1 \pmod{47}$
3. a. Montrer que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un entier relatif  $q$  tel que :  
 $p \times q \equiv 1 \pmod{47}$ .

Pour la suite, on admet que pour tout entier  $p$  de  $A$ , il existe un unique entier, noté  $inv(p)$ , appartenant à  $A$  tel que :  
 $p \times inv(p) \equiv 1 \pmod{47}$

Par exemple :

- $inv(1) = 1$  car  $1 \times 1 \equiv 1 \pmod{47}$
  - $inv(2) = 24$  car  $2 \times 24 \equiv 1 \pmod{47}$
  - $inv(3) = 16$  car  $3 \times 16 \equiv 1 \pmod{47}$
- b. Quels sont les entiers  $p$  de  $A$  qui vérifient :  
 $p = inv(p)$
  - c. Montrer que :  $46! \equiv -1 \pmod{47}$