Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Terminales S - Spécialité/Annales sur la congruence

255. Exercices non-classés :

Exercice 3142

Rappel:
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod{7}$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances:*
   a. Soient a, b, c et d des entiers relatifs.
   Démontrer que:
   Si $a \equiv b \pmod{7}$ et $c \equiv d \pmod{7}$
   alors $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{7}$.
   b. En déduire que: pour a et b entiers relatifs non nuls.
   Si $a \equiv b \pmod{7}$ alors pour tout entier naturel n:
   $a^n \equiv b^n \pmod{7}$.
2. Pour $a=2$ puis pour $a=3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que: $a^n \equiv 1 \pmod{7}$.
3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.
   a. Montrer que: $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
   b. On appelle *ordre* de $a \pmod{7}$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.
   En déduire que k divise 6.
   Quelles sont les valeurs possibles de k?
   c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.
4. A tout entier naturel n, on associe le nombre:
   $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$.
   Montrer que: $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$

Exercice 3319

1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
   b. Démontrer alors que: $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$.
2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n: $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$.
   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante:
   $N \equiv S \pmod{9}$.
   c. En déduire que N est divisible par 9 si, et seulement si, S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par:
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante: $A \equiv D \pmod{9}$.
   b. Sachant que $2005 < 10000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que: $B \leqslant 72180$.
   c. Démontrer que: $C \leqslant 45$.
   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
   e. Démontrer que: $D = 7$.

Exercice 3554

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de 3^n par 7.
   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.
   c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.
   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque?
   e. En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n est premier avec 7.
2. Soit $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que si U_n est divisble par 7 alors 3^n-1 est divisible par 7.

b. Réciproquement, montrer que si 3^n-1 est divisible par 7 alors U_n est divisible par 7.
En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisibles par 7.

Exercice 5960

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est un multiple de 7 *(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence)*.
En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier :
$Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$

a. Si $p=3n$, quel est le reste de la divisioin de A_p par 7?

b. Démontrer que si $p=3n+1$ alors A_p est divisible par 7.

c. Etudier le cas où $p=3n+2$

4. On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
$a = \overline{1\,001\,001\,000}$; $b = \overline{1\,000\,100\,010\,000}$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p. Sont-ils divisibles par 7?

Exercice 6795

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soite x le nombre entier associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $7x+5$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y *(c'est elle qui code la lettre d'origine)*.

Exemple :

- M correspondant à $x=12$
- $7\times12+5=89$
- Or $89\equiv11 \pmod{26}$ et 11 correspondant à la lettre L, donc la lettre M est codée par la lettre L.

1. Coder la lettre L.

2. a. Soit k un entier relatif. Montrer que si $k\equiv 7x \pmod{26}$ alors $15{\cdot}k\equiv x \pmod{26}$.

b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

c. En déduire que $y\equiv7x+5 \pmod{26}$ équivaut à $x\equiv 15{\cdot}y+3 \pmod{26}$.

3. A l'aide de la question précédente décoder la lettre E.

Partie B

On considère les suites (a_n) et (b_n) telles que a_0 et b_0 sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7{\cdot}a_n + 5 \\ b_{n+1} = 15{\cdot}b_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$a_n = \left(a_0+\frac{5}{6}\right)\times7^n - \frac{5}{6}$$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel n :

$$b_n = \left(b_0+\frac{3}{14}\right)\times15^n - \frac{3}{14}$$

Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté *(on peut tester les* 312 *couples de coefficients possibles)*. Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie **A**.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé $2-2-5-6$, on applique "2" fois le chiffrement affine à la lettre M *(cela donne E)*, "2" fois le chiffrement de la lettre A, "5" fois le chiffrement à la lettre T et enfin "6" fois le chiffrement à la lettre H.

Dans cette partie, on utilisera la clé $2-2-5-6$.
Décoder la lettre Q dans le mot $IYYQ$.

