

# Terminales S - Spécialité/Annales sur la congruence

## 255. Exercices non-classés :

### Exercice 3142



Rappel :

Pour deux entiers relatifs  $a$  et  $b$ , on dit que  $a$  est congru à  $b$  modulo 7, et on écrit  $a \equiv b \pmod{7}$  lorsqu'il existe un entier relatif  $k$  tel que  $a = b + 7k$ .

1. Cette question constitue une restitution organisée de connaissances :

- a. Soient  $a, b, c$  et  $d$  des entiers relatifs.  
Démontrer que :  
Si  $a \equiv b \pmod{7}$  et  $c \equiv d \pmod{7}$   
alors  $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{7}$ .

- b. En déduire que : pour  $a$  et  $b$  entiers relatifs non nuls.  
Si  $a \equiv b \pmod{7}$  alors pour tout entier naturel  $n$  :  
 $a^n \equiv b^n \pmod{7}$ .

2. Pour  $a=2$  puis pour  $a=3$ , déterminer un entier naturel  $n$  non nul tel que :  $a^n \equiv 1 \pmod{7}$ .

3. Soit  $a$  un entier naturel non divisible par 7.

- a. Montrer que :  $a^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .
- b. On appelle *ordre* de  $a \pmod{7}$ , et on désigne par  $k$ , le plus petit entier naturel non nul tel que  $a^k \equiv 1 \pmod{7}$ . Montrer que le reste  $r$  de la division euclidienne de 6 par  $k$  vérifie  $a^r \equiv 1 \pmod{7}$ .  
En déduire que  $k$  divise 6.  
Quelles sont les valeurs possibles de  $k$ ?

- c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers  $a$  compris entre 2 et 6.

4. A tout entier naturel  $n$ , on associe le nombre :

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que :  $A_{2006} \equiv 6 \pmod{7}$

### Exercice 3319



1. a. Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul  $n$  le reste dans la division euclidienne par 9 de  $7^n$ .

- b. Démontrer alors que :  $(2005)^{2005} \equiv 7 \pmod{9}$ .

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel non nul  $n$  :  
 $(10)^n \equiv 1 \pmod{9}$ .

- b. On désigne par  $N$  un entier naturel écrit en base dix, on appelle  $S$  la somme de ses chiffres. Démontrer la relation suivante :  
 $N \equiv S \pmod{9}$ .

- c. En déduire que  $N$  est divisible par 9 si, et seulement si,  $S$  est divisible par 9.

3. On suppose que  $A = (2005)^{2005}$  ; on désigne par :

- $B$  la somme des chiffres de  $A$  ;
- $C$  la somme des chiffres de  $B$  ;
- $D$  la somme des chiffres de  $C$ .

- a. Démontrer la relation suivante :  $A \equiv D \pmod{9}$ .

- b. Sachant que  $2005 < 10000$ , démontrer que  $A$  s'écrit en numération décimale avec au plus 8020 chiffres. En déduire que :  $B \leq 72180$ .

- c. Démontrer que :  $C \leq 45$ .

- d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de  $D$  plus petit que 15.

- e. Démontrer que :  $D = 7$ .

### Exercice 3554



Dans tout l'exercice,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

1. a. Pour  $1 \leq n \leq 6$ , calculer les restes de la division euclidienne de  $3^n$  par 7.

- b. Démontrer que, pour tout  $n$ ,  $3^{n+6} - 3^n$  est divisible par 7.  
En déduire que  $3^n$  et  $3^{n+6}$  ont le même reste dans la division par 7.

- c. A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de  $3^{1000}$  par 7.

- d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de  $3^n$  par 7, pour  $n$  quelconque?

- e. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $3^n$  est premier avec 7.

2. Soit  $U_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i$ , où  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- a. Montrer que si  $U_n$  est divisible par 7 alors  $3^n - 1$  est divisible par 7.
- b. Réciproquement, montrer que si  $3^n - 1$  est divisible par 7 alors  $U_n$  est divisible par 7.  
En déduire les valeurs de  $n$  telles que  $U_n$  soit divisibles par 7.

### Exercice 5960



1. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n} - 1$  est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).  
En déduire que  $2^{3n+1} - 2$  est un multiple de 7 et que  $2^{3n+2} - 4$  est un multiple de 7.

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre  $p$  étant un entier naturel, on considère le nombre entier :

$$Q_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$$

- a. Si  $p = 3n$ , quel est le reste de la division de  $A_p$  par 7?
- b. Démontrer que si  $p = 3n + 1$  alors  $A_p$  est divisible par 7.
- c. Etudier le cas où  $p = 3n + 2$

4. On considère les nombres entiers  $a$  et  $b$  écrits dans le système binaire :

$$a = \overline{1001001000} \quad ; \quad b = \overline{100010001000}$$

Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme  $A_p$ . Sont-ils divisibles par 7?

### Exercice 6795



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

#### Partie A

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Soit  $x$  le nombre entier associé à la lettre à coder. On détermine le reste  $y$  de la division euclidienne de  $7x + 5$  par 26, puis on en déduit la lettre associée à  $y$  (c'est elle qui code la lettre

d'origine).

Exemple :

- $M$  correspondant à  $x = 12$
- $7 \times 12 + 5 = 89$
- Or  $89 \equiv 11 \pmod{26}$  et 11 correspondant à la lettre  $L$ , donc la lettre  $M$  est codée par la lettre  $L$ .

1. Coder la lettre  $L$ .

2. a. Soit  $k$  un entier relatif. Montrer que si  $k \equiv 7x \pmod{26}$  alors  $15 \cdot k \equiv x \pmod{26}$ .

- b. Démontrer la réciproque de l'implication précédente.

- c. En déduire que  $y \equiv 7x + 5 \pmod{26}$  équivaut à  $x \equiv 15 \cdot y + 3 \pmod{26}$ .

3. A l'aide de la question précédente décoder la lettre  $E$ .

#### Partie B

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que  $a_0$  et  $b_0$  sont des entiers compris entre 0 et 25 inclus et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 7 \cdot a_n + 5 \\ b_{n+1} = 15 \cdot b_n + 3 \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$a_n = \left(a_0 + \frac{5}{6}\right) \times 7^n - \frac{5}{6}$$

On admet pour la suite du problème que pour tout entier naturel  $n$  :

$$b_n = \left(b_0 + \frac{3}{14}\right) \times 15^n - \frac{3}{14}$$

#### Partie C

Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique "2" fois le chiffrement affine à la lettre  $M$  (cela donne  $E$ ), "2" fois le chiffrement de la lettre  $A$ , "5" fois le chiffrement à la lettre  $T$  et enfin "6" fois le chiffrement à la lettre  $H$ .

Dans cette partie, on utilisera la clé 2-2-5-6.

Décoder la lettre  $Q$  dans le mot IYYQ.