Compiler exercice

Compiler correction

Plus d'option

Terminales S - Spécialité/98-unPeuPlusArithmetique

1. Propriété du pgcd et ppcm :

Exercice 3865

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a<b \quad ; \quad PPCM(a\,;b)-PGCD(a\,;b)=1$"

Exercice 3866

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"On considère l'équation : $(E) :\ x^2-52x+480=0$
où x est un entier naturel.
Il existe deux entiers naturels non nuls dont le $PGCD$ et le $PPCM$ sont solutions de l'équation (E)."

2. Petit théorème de Fermat :

Exercice 3192

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier 4^n-1, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*Si p est un nombre entier premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1}-1\equiv 0 \pmod{p}$*"

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28}-1$ est divisible par 29.
3. Pour $1\leqslant n\leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, l'entier $4^{4k}-1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n l'entier 4^n-1 est-il divisible par 5?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28}-1$.

Partie B. Divisibilité par un entier premier

Soit p un entier premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n\geqslant 1$ tel que :
   $4^n\equiv 1 \pmod{p}$.
2. Soit $n\geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n\equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b\equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b :
   a. Démontrer que $4^r\equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r=0$.
   b. Prouver l'équivalence : 4^n-1 est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p-1$.

Exercice 3252

1. On considère l'équation (E) : $\quad 109x-226y=1$

   où x et y sont des entiers relatifs.

   a. Déterminer le *pgcd* de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E)?
   b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141+226k\,;68+109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que : $\quad 109d=1+226e$.
   (On précisera les valeurs des entiers d et e)
2. Démontrer que 227 est un entier premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que : $a\leqslant 226$.
   On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
   - à tout entier de A, f associe le reste de la division

euclidienne de a^{109} par 227 ;

- à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

a. Vérifier que : $g[f(0)]=0$.
On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
Si p est un entier premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A :
$a^{226}\equiv 1 \pmod{227}$.

c. En utilisant 1. b. , en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A : $g[f(a)]=a$.
Que peut-on dire de : $f[g(a)]=a$?

Exercice 3625

1. On considère l'ensemble : $A_7=\{1;2;3;4;5;6\}$

a. Pour tout élément de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que :
$a\cdot y\equiv 1 \pmod{7}$.

b. Pour x entier relatif, démontrer que :
l'équation $3x\equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x\equiv 4 \pmod{7}$.

c. Pour x entier relatif, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a\cdot x\equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p=\{1;2;\dots;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation :
$a\cdot x\equiv 1 \pmod{p}$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $a\cdot x\equiv 1 \pmod{p}$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x\cdot y\equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement, si x est un multiple de p où y est un multiple de p.

d. Application : $p=31$. Résoudre dans A_{31} les équations :
$2x\equiv 1 \pmod{31}$ et $3x\equiv 1 \pmod{31}$.
A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation :
$6x^2-5x+1\equiv 0 \pmod{31}$

Exercice 3867

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*soit p un entier premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p*".

1. Soit p un entier premier impair.

a. Montrer qu'il existe une entier naturel k, non nul, tel que :
$2^k\equiv 1 \pmod{p}$.

b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k\equiv 1 \pmod{p}$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors :
$2^n\equiv 1 \pmod{p}$.

c. Soit b tel que $2^b\equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que :
si $2^n\equiv 1 \pmod{p}$ alors b divise n.

2. Soit q un entier premier impair et l'entier $A=2^q-1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

a. Justifier que : $2^q\equiv 1 \pmod{p}$

b. Montrer que p est impair.

c. Soit b tel que $2^b\equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant 1., que b divise q. En déduire que $b=q$.

d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p\equiv 1 \pmod{2q}$.

3. Soit $A_1=2^{17}-1$. Voici la liste des entiers premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

Exercice 3868

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$A(n)=n^4+1$

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats :

a. Etudier la partié de l'entier $A(11)$.

b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.

c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.

d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
$n^8\equiv 1 \pmod{d}$

2. Recherche de critères :

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que :
$n^k\equiv 1 \pmod{d}$

a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.

b. En déduire que s est un diviseur de 8.

c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premier de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.
Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas :
$s=1$; $s=2$; $s=4$
conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera en compte dans l'évaluation.*

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication : la liste des entiers premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137. . .

Exercice 4327

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : *Si p est un entier premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :
$u_0 = 1$; $u_{n+1} = 10 \cdot u_n + 21$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$3 \cdot u_n = 10^{n+1} - 7$$
   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un entier premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains entiers premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$$3 \cdot u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$$
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. a. Démontrer l'égalité : $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{16 \cdot k+8}$ est divisible par 17.

3. PPCM :

Exercice 3863

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que : $PGCD(x\,;y) = y - x$

1. a. Calculer le $PGCD(363\,;\,484)$.
   b. Le couple $(363\,;484)$ appartient-il à S?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S
Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x\,;y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :
$$x = k \cdot (y-x) \quad ; \quad y = (k+1)(y-x)$$
   b. En déduire que pour tout couple $(x\,;y)$ de S, on a :
$$PPCM(x\,;y) = k \cdot (k+1) \cdot (y-x)$$

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
   b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de S tels que :
$$PPCM(x\,;\,y) = 228$$

Exercice 3864

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :
$$PGCD(a+b\,;\,a \cdot b) = p$$
où p est un entier premier.
   a. Démontrer que p divise a^2.
   (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - a \cdot b$)
   b. En déduire que p divise a.
   On constate donc, de même, que p divise b.
   c. Démontrer que $PGCD(a\,;\,b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.
   a. Résoudre le système :
$$\begin{cases} PGCD(a\,;\,b) = 5 \\ PPCM(a\,;\,b) = 170 \end{cases}$$
   b. En déduire les solutions du système :
$$\begin{cases} PGCD(a+b\,;\,a \cdot b) = 5 \\ PPCM(a\,;\,b) = 170 \end{cases}$$

4. Arithmétique et complexe :

Exercice 3152

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$
   a. toutes les solutions sont des entiers pairs
   b. il n'y a aucune solution
   c. les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$
   d. les solutions vérifient :
$$x \equiv 2 \pmod{6} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{6}$$

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y)=(34k-7\,;5-24k)$, $k\in\mathbb{Z}$

b. L'équation (E) n'a aucune solution

c. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y)=(17k-7\,;5-12k)$, $k\in\mathbb{Z}$

d. Les solutions de (E) sont toutes de la forme
$(x\,;y)=(-7k\,;5k)$, $k\in\mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n=1789$ et $p=1789^{2005}$. On a alors :

a. $n\equiv 4 \pmod{17}$ et $p\equiv 0 \pmod{17}$

b. p est un entier premier

c. $p\equiv 4 \pmod{17}$

d. $p\equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d 'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :

a. $z=\dfrac{b-\mathrm{i}a}{1-\mathrm{i}}$

b. $z-a=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\cdot(b-a)$

c. $a-z=\mathrm{i}\cdot(b-z)$

d. $b-z=\dfrac{\pi}{2}\cdot(a-z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

a. $h\circ g\circ f$ transforme A en b et c'est une rotation.

b. $h\circ g\circ f$ est la réflection ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$

c. $h\circ g\circ f$ n'est pas une similitude.

d. $h\circ g\circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

Exercice 3165

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\,;\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $4\,cm$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a=1 \quad ; \quad b=1+2\mathrm{i} \quad ; \quad c=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d=3+2\mathrm{i}$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en b et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit $\left(U_n\right)$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n+1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.

3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite $\left(U_n\right)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n=2^n-1$.

5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n\geqslant p$:

$$U_n=U_p\cdot\left(U_{n-p}+1\right)+U_{n-p}$$

La notation $pgcd(a\,;b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n\geqslant p$ l'égalité :

$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p)=\mathrm{pgcd}(U_p\,;U_{n-p})$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :

$$\mathrm{pgcd}(U_n\,;U_p)=U_{\mathrm{pgcd}(n\,;p)}$$

Déterminer l'entier : $\mathrm{pgcd}(U_{2005}\,;U_{15})$

