

# Terminales S - Spécialité/98-unPeuPlusArithmetique

## 1. Propriété du pgcd et ppcm :

### Exercice 3865



Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

“Il existe un seul couple  $(a; b)$  de nombres entiers naturels, tel que :

$$a < b \quad ; \quad PPCM(a; b) - PGCD(a; b) = 1”$$

### Exercice 3866



Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

“On considère l'équation :  $(E) : x^2 - 52x + 480 = 0$   
où  $x$  est un entier naturel.

Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation  $(E)$ .”

## 2. Petit théorème de Fermat :

### Exercice 3192



Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier  $4^n - 1$ , lorsque  $n$  est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : “Si  $p$  est un nombre entier premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ , alors  $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ”

**Partie A.** Quelques exemples.

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $4^n$  est congru à 1 modulo 3.
- Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que  $4^{28} - 1$  est divisible par 29.
- Pour  $1 \leq n \leq 4$ , déterminer le reste de la division de  $4^n$  par 17. En déduire que, pour tout entier  $k$ , l'entier  $4^{4k} - 1$  est divisible par 17.
- Pour quels entiers naturels  $n$  l'entier  $4^n - 1$  est-il divisible par 5?
- A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de  $4^{28} - 1$ .

**Partie B.** Divisibilité par un entier premier

Soit  $p$  un entier premier différent de 2.

- Démontrer qu'il existe un entier  $n \geq 1$  tel que :  
 $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
- Soit  $n \geq 1$  un entier naturel tel que  $4^n \equiv 1 \pmod{p}$ . On

note  $b$  le plus petit entier strictement positif tel que  $4^b \equiv 1 \pmod{p}$  et  $r$  le reste de la division euclidienne de  $n$  par  $b$  :

- Démontrer que  $4^r \equiv 1 \pmod{p}$ . En déduire que  $r = 0$ .
- Prouver l'équivalence :  $4^n - 1$  est divisible par  $p$  si, et seulement si,  $n$  est multiple de  $b$ .
- En déduire que  $b$  divise  $p - 1$ .

### Exercice 3252



- On considère l'équation  $(E) : 109x - 226y = 1$

où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation  $(E)$ ?
- Montrer que l'ensemble des solutions de  $(E)$  est l'ensemble des couples de la forme  $(141 + 226k; 68 + 109k)$ , où  $k$  appartient à  $\mathbb{Z}$ .  
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul  $d$  inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul  $e$  tels que :  $109d = 1 + 226e$ .  
(On précisera les valeurs des entiers  $d$  et  $e$ )

- Démontrer que 227 est un entier premier.
- On note  $A$  l'ensemble des 227 entiers naturels  $a$  tels que :  
 $a \leq 226$ .

On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $A$  dans  $A$  définies de la manière suivante :

- à tout entier de  $A$ ,  $f$  associe le reste de la division

euclidienne de  $a^{109}$  par 227;

- à tout entier de  $A$ ,  $g$  associe le reste de la division euclidienne de  $a^{141}$  par 227.

- a. Vérifier que:  $g[f(0)] = 0$ .  
On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat:

**Si  $p$  est un entier premier et  $a$  un entier non divisible par  $p$  alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$**

- b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ :  
 $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$ .
- c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul  $a$  de  $A$ :  $g[f(a)] = a$ .  
Que peut-on dire de:  $f[g(a)] = a$ ?

### Exercice 3625



1. On considère l'ensemble:  $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- a. Pour tout élément de  $A_7$  écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément  $y$  de  $A_7$  tel que:  
 $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$ .
- b. Pour  $x$  entier relatif, démontrer que:  
l'équation  $3x \equiv 5 \pmod{7}$  équivaut à  $x \equiv 4 \pmod{7}$ .
- c. Pour  $x$  entier relatif, montrer que les seuls entiers relatifs  $x$  solutions de l'équation  $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$  sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question,  $p$  est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble  $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$  des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à  $p$ . Soit  $a$  un élément de  $A_p$ .

- a. Vérifier que  $a^{p-2}$  est une solution de l'équation:  
 $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ .
- b. On note  $r$  le reste dans la division euclidienne de  $a^{p-2}$  par  $p$ . Démontrer que  $r$  est l'unique solution  $x$  dans  $A_p$ , de l'équation  $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$ .
- c. Soient  $x$  et  $y$  deux entiers relatifs. Démontrer que  $x \cdot y \equiv 0 \pmod{p}$  si, et seulement, si  $x$  est un multiple de  $p$  où  $y$  est un multiple de  $p$ .

- d. Application:  $p=31$ . Résoudre dans  $A_{31}$  les équations:

$$2x \equiv 1 \pmod{31} \quad \text{et} \quad 3x \equiv 1 \pmod{31}.$$

A l'aide des résultats précédents, résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation:

$$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

### Exercice 3867



On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat: "soit  $p$  un entier premier et  $a$  un entier naturel premier avec  $p$ ; alors  $a^{p-1} - 1$  est divisible par  $p$ ".

1. Soit  $p$  un entier premier impair.

- a. Montrer qu'il existe un entier naturel  $k$ , non nul, tel que:  
 $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ .
- b. Soit  $k$  un entier naturel non nul tel que  $2^k \equiv 1 \pmod{p}$  et soit  $n$  un entier naturel. Montrer que, si  $k$  divise  $n$ , alors:  
 $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ .
- c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $b$ , que:

$$\text{si } 2^n \equiv 1 \pmod{p} \text{ alors } b \text{ divise } n.$$

2. Soit  $q$  un entier premier impair et l'entier  $A = 2^q - 1$ .

On prend pour  $p$  un facteur premier de  $A$ .

- a. Justifier que:  $2^q \equiv 1 \pmod{p}$
- b. Montrer que  $p$  est impair.
- c. Soit  $b$  tel que  $2^b \equiv 1 \pmod{p}$ ,  $b$  étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.  
Montrer, en utilisant 1., que  $b$  divise  $q$ . En déduire que  $b = q$ .
- d. Montrer que  $q$  divise  $p-1$ , puis montrer que  $p \equiv 1 \pmod{2q}$ .

3. Soit  $A_1 = 2^{17} - 1$ . Voici la liste des entiers premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme  $34m+1$ , avec  $m$  entier non nul: 103, 137, 239, 307. En déduire que  $A_1$  est premier.

### Exercice 3868



Pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2, on pose:

$$A(n) = n^4 + 1$$

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de  $A(n)$ .

1. Quelques résultats:

- a. Etudier la parité de l'entier  $A(11)$ .
- b. Montrer que, quel que soit l'entier  $n$ ,  $A(n)$  n'est pas un multiple de 3.
- c. Montrer que tout entier  $d$  diviseur de  $A(n)$  est premier avec  $n$ .
- d. Montrer que, pour tout entier  $d$  diviseur de  $A(n)$ :  
 $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

2. Recherche de critères:

Soit  $d$  un diviseur de  $A(n)$ . On note  $s$  le plus petit des entiers naturels non nuls  $k$  tels que:

$$n^k \equiv 1 \pmod{d}$$

- a. Soit  $k$  un tel entier. En utilisant la division euclidienne de  $k$  par  $s$ , montrer que  $s$  divise  $k$ .
- b. En déduire que  $s$  est un diviseur de 8.
- c. Montrer que si, de plus,  $d$  est premier, alors  $s$  est un diviseur de  $d-1$ . On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de  $A(n)$  dans le cas où  $n$  est un entier pair.

Soit  $p$  un diviseur premier de  $A(n)$ . En examinant successivement les cas:

$$s = 1 \quad ; \quad s = 2 \quad ; \quad s = 4$$

conclure que  $p$  est congru à 1 modulo 8.

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera en compte dans l'évaluation.

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de  $A(12)$ .

Indication: la liste des entiers premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137...

**Exercice 4327**

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : Si  $p$  est un entier premier et  $a$  est un entier naturel non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 10 \cdot u_n + 21 \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$  :  

$$3 \cdot u_n = 10^{n+1} - 7$$
 b. En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , l'écriture décimale de  $u_n$ .

**3. PPCM :****Exercice 3863**

Dans tout l'exercice  $x$  et  $y$  désignent des entiers naturels non nuls vérifiant  $x < y$ .  $S$  est l'ensemble des couples  $(x; y)$  tels que :  $PGCD(x; y) = y - x$

1. a. Calculer le  $PGCD(363; 484)$ .  
 b. Le couple  $(363; 484)$  appartient-il à  $S$ ?
2. Soit  $n$  un entier naturel non nul; le couple  $(n; n+1)$  appartient-il à  $S$   
 Justifier votre réponse.
3. a. Montrer que  $(x; y)$  appartient à  $S$  si, et seulement si, il existe un entier naturel  $k$  non nul tel que :  

$$x = k \cdot (y - x) \quad ; \quad y = (k + 1)(y - x)$$
 b. En déduire que pour tout couple  $(x; y)$  de  $S$ , on a :  

$$PPCM(x; y) = k \cdot (k + 1) \cdot (y - x)$$
4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.  
 b. En déduire l'ensemble des couples  $(x; y)$  de  $S$  tels que :

**4. Arithmétique et complexe :****Exercice 3152**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :  

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

3. Montrer que  $u_2$  est un entier premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite  $(u_n)$  par certains entiers premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est pas divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.
5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  :  

$$3 \cdot u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$$
 b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  n'est pas divisible par 11.
6. a. Démontrer l'égalité :  $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$ .  
 b. En déduire que, pour tout entier naturel  $k$ ,  $u_{16 \cdot k + 8}$  est divisible par 17.

$$PPCM(x; y) = 228$$

**Exercice 3864**

1. Soient  $a$  et  $b$  des entiers naturels non nuls tels que :  

$$PGCD(a + b; a \cdot b) = p$$
 où  $p$  est un entier premier.
  - a. Démontrer que  $p$  divise  $a^2$ .  
 (On remarquera que  $a^2 = a(a+b) - a \cdot b$ )
  - b. En déduire que  $p$  divise  $a$ .  
 On constate donc, de même, que  $p$  divise  $b$ .
  - c. Démontrer que  $PGCD(a; b) = p$ .
2. On désigne par  $a$  et  $b$  des entiers naturels tels que  $a \leq b$ .
  - a. Résoudre le système :  

$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$$
  - b. En déduire les solutions du système :  

$$\begin{cases} PGCD(a + b; a \cdot b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$$

- a. toutes les solutions sont des entiers pairs
- b. il n'y a aucune solution
- c. les solutions vérifient  $x \equiv 2 \pmod{6}$
- d. les solutions vérifient :  

$$x \equiv 2 \pmod{6} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{6}$$

2. On se propose de résoudre l'équation  $(E)$  :  $24x + 34y = 2$ , où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- a. Les solutions de  $(E)$  sont toutes de la forme :  
 $(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k), k \in \mathbb{Z}$
- b. L'équation  $(E)$  n'a aucune solution
- c. Les solutions de  $(E)$  sont toutes de la forme :  
 $(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k), k \in \mathbb{Z}$
- d. Les solutions de  $(E)$  sont toutes de la forme  
 $(x; y) = (-7k; 5k), k \in \mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers  $n=1789$  et  $p=1789^{2005}$ .  
 On a alors :

- a.  $n \equiv 4 \pmod{17}$  et  $p \equiv 0 \pmod{17}$
- b.  $p$  est un entier premier
- c.  $p \equiv 4 \pmod{17}$
- d.  $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Le triangle  $MAB$  est rectangle isocèle direct d'hypoténuse  $[AB]$  si, et seulement si, le point  $M$  d'affixe  $z$  est tel que :

- a.  $z = \frac{b - ia}{1 - i}$       b.  $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (b - a)$
- c.  $a - z = i \cdot (b - z)$       d.  $b - z = \frac{\pi}{2} \cdot (a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts  $A$  et  $B$ ; on note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ . Soit  $f$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport 2 et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{3}$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ ; soit  $g$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\frac{1}{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ ; soit  $h$  la symétrie centrale de centre  $I$ .

- a.  $h \circ g \circ f$  transforme  $A$  en  $b$  et c'est une rotation.  
 $h \circ g \circ f$  est la réflexion ayant pour axe
- b. la médiatrice du segment  $[AB]$
- c.  $h \circ g \circ f$  n'est pas une similitude.
- d.  $h \circ g \circ f$  est la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$

### Exercice 3165



Le plan complexe  $\mathcal{P}$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a, b, c$  et  $d$  telles que :

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 + 2i \quad ; \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d = 3 + 2i$$

On considère la similitude directe  $s$  qui transforme  $A$  en  $b$  et  $C$  en  $D$ . Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  et  $M'$ , d'affixe  $z'$ , son image par  $s$ .

1. Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ .  
 Déterminer les éléments caractéristiques de  $s$ .

Soit  $(U_n)$  la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1}$  et  $U_n$  sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude  $s$ , les termes de la suite  $(U_n)$ .
4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $U_n = 2^n - 1$ .
5. Montrer que, pour tous entiers naturels  $n$  et  $p$  non nuls tels que  $n \geq p$  :

$$U_n = U_p \cdot (U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$$

La notation  $\text{pgcd}(a; b)$  est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels  $a$  et  $b$ . Montrer pour  $n \geq p$  l'égalité :

$$\text{pgcd}(U_n; U_p) = \text{pgcd}(U_p; U_{n-p})$$

6. Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls, montrer que :
- $$\text{pgcd}(U_n; U_p) = U_{\text{pgcd}(n; p)}$$

Déterminer l'entier :  $\text{pgcd}(U_{2005}; U_{15})$