

Terminales S - Spécialité/98-unPeuPlusArithmetique

1. Propriété du pgcd et ppcm :

Exercice 3865



Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

“Il existe un seul couple $(a; b)$ de nombres entiers naturels, tel que :

$$a < b \quad ; \quad PPCM(a; b) - PGCD(a; b) = 1”$$

Exercice 3866



Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

“On considère l'équation : $(E) : x^2 - 52x + 480 = 0$
où x est un entier naturel.

Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E) .”

2. Petit théorème de Fermat :

Exercice 3192



Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : “Si p est un nombre entier premier et a un entier naturel premier avec p , alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ”

Partie A. Quelques exemples.

- Démontrer que, pour tout entier naturel n , 4^n est congru à 1 modulo 3.
- Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
- Pour $1 \leq n \leq 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k , l'entier $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
- Pour quels entiers naturels n l'entier $4^n - 1$ est-il divisible par 5?
- A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un entier premier

Soit p un entier premier différent de 2.

- Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tel que :
 $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.
- Soit $n \geq 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On

note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b :

- Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.
- Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b .
- En déduire que b divise $p-1$.

Exercice 3252



- On considère l'équation $(E) : 109x - 226y = 1$

où x et y sont des entiers relatifs.

- Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
- Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k; 68 + 109k)$, où k appartient à \mathbb{Z} .
En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que : $109d = 1 + 226e$.
(On précisera les valeurs des entiers d et e)

- Démontrer que 227 est un entier premier.
- On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que :
 $a \leq 226$.

On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

- à tout entier de A , f associe le reste de la division

euclidienne de a^{109} par 227;

- à tout entier de A , g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

- a. Vérifier que: $g[f(0)] = 0$.
On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat:

Si p est un entier premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

- b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A :
 $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.
- c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A : $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de: $f[g(a)] = a$?

Exercice 3625



1. On considère l'ensemble: $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

- a. Pour tout élément de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que:
 $a \cdot y \equiv 1 \pmod{7}$.
- b. Pour x entier relatif, démontrer que:
l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
- c. Pour x entier relatif, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $a \cdot x \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question, p est un entier premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .

- a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation:
 $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
- b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p , de l'équation $a \cdot x \equiv 1 \pmod{p}$.
- c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $x \cdot y \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement, si x est un multiple de p où y est un multiple de p .

- d. Application: $p=31$. Résoudre dans A_{31} les équations:

$$2x \equiv 1 \pmod{31} \quad \text{et} \quad 3x \equiv 1 \pmod{31}.$$

A l'aide des résultats précédents, résoudre dans \mathbb{Z} l'équation:

$$6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$$

Exercice 3867



On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat: "soit p un entier premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p ".

1. Soit p un entier premier impair.

- a. Montrer qu'il existe un entier naturel k , non nul, tel que:
 $2^k \equiv 1 \pmod{p}$.
- b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n , alors:
 $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.
- c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b , que:

$$\text{si } 2^n \equiv 1 \pmod{p} \text{ alors } b \text{ divise } n.$$

2. Soit q un entier premier impair et l'entier $A = 2^q - 1$.

On prend pour p un facteur premier de A .

- a. Justifier que: $2^q \equiv 1 \pmod{p}$
- b. Montrer que p est impair.
- c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
Montrer, en utilisant 1., que b divise q . En déduire que $b = q$.
- d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1 \pmod{2q}$.

3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des entiers premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul: 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

Exercice 3868



Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose:

$$A(n) = n^4 + 1$$

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats:

- a. Etudier la parité de l'entier $A(11)$.
- b. Montrer que, quel que soit l'entier n , $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
- c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n .
- d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
 $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$

2. Recherche de critères:

Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que:

$$n^k \equiv 1 \pmod{d}$$

- a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s , montrer que s divise k .
- b. En déduire que s est un diviseur de 8.
- c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d-1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.

3. Recherche des diviseurs premiers de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.

Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas:

$$s = 1 \quad ; \quad s = 2 \quad ; \quad s = 4$$

conclure que p est congru à 1 modulo 8.

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera en compte dans l'évaluation.

Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

Indication: la liste des entiers premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137...

Exercice 4327

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : Si p est un entier premier et a est un entier naturel non divisible par p , alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_{n+1} = 10 \cdot u_n + 21 \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$3 \cdot u_n = 10^{n+1} - 7$$
 b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'écriture décimale de u_n .

3. PPCM :**Exercice 3863**

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que : $PGCD(x; y) = y - x$

1. a. Calculer le $PGCD(363; 484)$.
 b. Le couple $(363; 484)$ appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul; le couple $(n; n+1)$ appartient-il à S ? Justifier votre réponse.
3. a. Montrer que $(x; y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$x = k \cdot (y - x) \quad ; \quad y = (k + 1)(y - x)$$
 b. En déduire que pour tout couple $(x; y)$ de S , on a :

$$PPCM(x; y) = k \cdot (k + 1) \cdot (y - x)$$
4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
 b. En déduire l'ensemble des couples $(x; y)$ de S tels que :

$$PPCM(x; y) = 228$$

Exercice 3864

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :

$$PGCD(a + b; a \cdot b) = p$$
 où p est un entier premier.
 - a. Démontrer que p divise a^2 .
 (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - a \cdot b$)
 - b. En déduire que p divise a .
 On constate donc, de même, que p divise b .
 - c. Démontrer que $PGCD(a; b) = p$.
2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$.
 - a. Résoudre le système :

$$\begin{cases} PGCD(a; b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$$
 - b. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} PGCD(a + b; a \cdot b) = 5 \\ PPCM(a; b) = 170 \end{cases}$$

4. Arithmétique et complexe :**Exercice 3152**

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fautive enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :

$$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$$

- a. toutes les solutions sont des entiers pairs
- b. il n'y a aucune solution
- c. les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$
- d. les solutions vérifient :

$$x \equiv 2 \pmod{6} \text{ ou } x \equiv 5 \pmod{6}$$

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

- a. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
 $(x; y) = (34k - 7; 5 - 24k), k \in \mathbb{Z}$
- b. L'équation (E) n'a aucune solution
- c. Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
 $(x; y) = (17k - 7; 5 - 12k), k \in \mathbb{Z}$
- d. Les solutions de (E) sont toutes de la forme
 $(x; y) = (-7k; 5k), k \in \mathbb{Z}$

3. On considère les deux entiers $n=1789$ et $p=1789^{2005}$.
 On a alors :

- a. $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$
- b. p est un entier premier
- c. $p \equiv 4 \pmod{17}$
- d. $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :

- a. $z = \frac{b - ia}{1 - i}$ b. $z - a = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (b - a)$
- c. $a - z = i \cdot (b - z)$ d. $b - z = \frac{\pi}{2} \cdot (a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{3}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I .

- a. $h \circ g \circ f$ transforme A en b et c'est une rotation.
 $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe
- b. la médiatrice du segment $[AB]$
- c. $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
- d. $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB}

Exercice 3165



Le plan complexe \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1 + 2i \quad ; \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d = 3 + 2i$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en b et C en D . Soit M un point d'affixe z et M' , d'affixe z' , son image par s .

1. Exprimer z' en fonction de z .
 Déterminer les éléments caractéristiques de s .

Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s , les termes de la suite (U_n) .
4. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$:

$$U_n = U_p \cdot (U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$$

La notation $\text{pgcd}(a; b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b . Montrer pour $n \geq p$ l'égalité :

$$\text{pgcd}(U_n; U_p) = \text{pgcd}(U_p; U_{n-p})$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
- $$\text{pgcd}(U_n; U_p) = U_{\text{pgcd}(n; p)}$$

Déterminer l'entier : $\text{pgcd}(U_{2005}; U_{15})$