Compiler exercice

Compiler correction

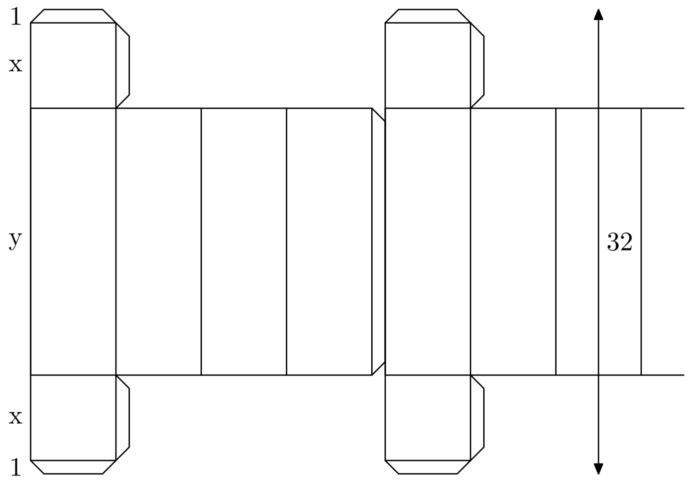
Plus d'option

Term L spé/Les fonctions

1. Fonctions polynomiales :

Exercice 73

Un fabricant de boîtes en carton dispose, pour sa fabrication, de rouleaux donnant une bande de carton de $32\,cm$ de large dans laquelle il trace et découpe les patrons de boîtes avant de les coller. Il dispose ses patrons de la manière indiquée dans le dessins ci-dessous :



Les boîtes, en forme de pavés droits, comportent deux faces carrées de $x\,cm$ de côté, munies de deux languettes de $1\,cm$ de large pour le collage, et quatre autres faces dont les dimensions en cm sont x et y, ainsi qu'un rabat pour la fermeture.

1. Le fabricant utilise toute la largeur de la bande de carton ; on a donc : $y=30-2\cdot x$.
   a. Expliquer pourquoi on a nécessairement : $0<x<15$.
   b. Démontrer que le colume V, en cm^3, de la boîte est donné par la formule :
   $V = 30\cdot x^2 - 2\cdot x^3$
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;15]$ par :
   $f(x) = 30\cdot x^2 - 2\cdot x^3$
   a. Déterminer la fonction dérivée f' de f et étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\,15]$.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur cet intervalle
3. a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs :

x	1	2	4	6	8	10	12	14	15
$f(x)$									

   b. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal. On prendra $1\,cm$ comme unité en abscisses et $1\,cm$ pour $100\,cm^3$ en ordonnées.
4. a. Pour quelle valeur de x, le volume V est-il maximun? Quelle est alors la valeur de ce volume? Quelle particularité présente la boîte dans ce cas là?
   b. Le fabricant veut que la boîte obtenue ait un volume de $500\,cm^3$ et que x soit inférieur à 10.
   Déterminer à l'aide du graphique, la valeur de x qu'il doit choisir.
   Vérifier pqr le clalcul puis calcuer la valeur de y correspondante.

Exercice 74

On considère un jeu de boules comme le jeu de pétanque par exemple. Un joueur lance une boule et on s'intéresse ici à la trajectoire de la boule.

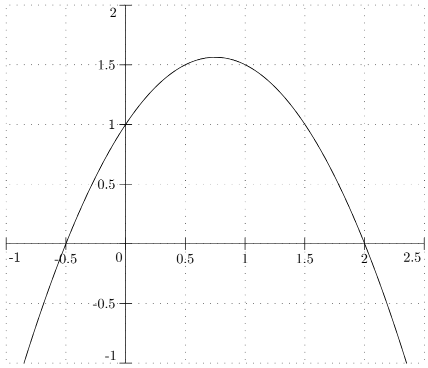
Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$g(x) = -x^2 + 1{,}5\cdot x + 1$

Où :

- x est le temps écoulé, en seconde, à partir de l'instant où la boule quitte la main du lanceur ;
- $g(x)$ représente, en mètres, la distance *(verticale)* séparant le sol de la voule après x secondes écoulées

1. La fonction g est représentée par une partie de la coure donnée en annexe.
   Repasser en couleur la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de la fonction g sur la feuille d'annexe.
2. a. Calculer $g(0)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 0.
   b. Calculer $g(1)$. Décrire par une phrase ce que représente le point d'abscisse 1.
3. Calculer $g'(x)$, g' désignant la dérivée de la fonction g.
4. a. Rechercher le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x, $x\in[0\,;2]$.
   b. En déduire le tableau complet des variations de la fonction g.
   c. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule atteint sa hauteur maximale.
   d. En explicitant la méthode utilisée, indiquer à quel instant la boule touche le sol.



Exercice 78

On considère la fonction f définie par :

$f(x) = 54\cdot\left(x^3 - 2\cdot x^2 + x\right)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

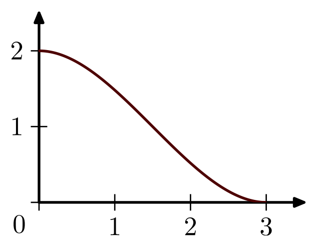
1. a. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   b. Vérifier que : $f'(x) = 54\cdot(3\cdot x - 1)(x-1)$ pour tout x de l'intervalle $[0\,;1]$.
   c. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
2. Donner le maximum de f sur l'intervalle $[0\,;1]$. Pour quelle valeur de x est-il atteint?
3. Recopier et compléter le tableau suivant par les valeurs de $f(x)$ arrondies à 0,1 près.

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x)$		6,9								

4. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur la feuille de papier millimétré jointe, en prenant pour unités graphiques 10 cm en absisse et 1 cm en ordonnée.

Exercice 98

Une entreprise souhaite fabriquer, pour de jeunes enfants, des toboggans dont le profil a l'allure de la courbe ci-contre.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,\right)$. On prendra 3 cm pour unité graphique.



L'objet de l'exercice est de modéliser ce profil à l'aide de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;3]$ vérifiant les conditions suivantes :

- La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $A(0\,;2)$ et $B(3\,;0)$;
- La courbe $\mathscr{C}$ admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie 1

1. a. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = -\frac{2}{3}\cdot x^2 + 2$$
   Etudier les variations de la fonction f *(on demande pas l'étude des limites)*.
   b. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
   $$g(x) = \frac{1}{3}\cdot x^2 - 2\cdot x + 3$$
   Etudier les variations de la fonction g *(on ne demande pas l'étude des limites)*.
2. On note respectivement $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.
   a. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ passent par le point $K\left(1\,;\frac{4}{3}\right)$ et ont la même tangente T en ce point.
   b. Tracer sur un même graphique, la droite T, la partie de $\mathscr{C}_f$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 1, et la partie de $\mathscr{C}_g$ correspondant aux points d'abscisses comprises entre 1 et 3.

La courbe obtenue en réunissant les deux parties de courbes est une représentation au problème posé.

Partie 2

Le bureau d'étude a établi que l'on pouvait également modéliser le profil du toboggan à l'aide d'une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \frac{4}{27}\cdot x^3 - \frac{2}{3}\cdot x^2 + 2$$

1. Démontrer que la fonction h vérifie les conditions (1) et (2).
2. Déterminer les coordonnées du point de $\mathscr{C}_h$ d'abscisse 1 et le coefficient directeur de la tangente en ce point.

2. Autres fonctions :

Exercice 111

On considère un segment $[AB]$ de longueur 10 centimètres et un point M de ce segment, différent de A et B. Les points N et P sont tels que $AMNP$ est un carré.

L'objectif de l'exercice est de déterminer le point M du segment $[AB]$ pour lequel la distance BN est minimale.

Les distances sont exprimées en centimètres.

1. On pose : $AM = x$.
   a. Faire une figure.
   b. Déterminer l'intervalle des valeurs possibles pour x.
   c. Déterminer en fonction de x la distance BM.
   d. Déterminer en fonction de x la distance BN.
   (On rappelle le théorème de Pythagore : dans un triangle ABC rectangle en A, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$)
2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f(x) = \sqrt{2\cdot x^2 - 20\cdot x + 100}$
   La fonction dérivée f' de f est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par : $f'(x) = \dfrac{2x-10}{\sqrt{2\cdot x^2 - 20\cdot x + 100}}$.

a. Répondre aux questions suivantes

i. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$

ii. Montrer que la fonction f admet un minimum sur l'intervalle $[0\,;10]$ que l'on précisera.

b. Répondre aux question suivantes :

i. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité un centimètre.

ii. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=8$. On fera apparaître les traits de construction utiles et on donnera des valeurs approchées des solutions lues.

3. En utilisant les résultats précédents, déterminer le point M du segment $[AB]$ popur lequel la distance BN est minimale.

Exercice 84

On veut résoudre, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, l'équation : $x^3-2\cdot x^2-4\cdot x+5=0$.

A - Méthode graphique

1. a. Vérifier que le nombre 2 n'est pas solution de l'équation.

b. Montrer que, pour $x\neq 2$, l'équation $x^2=\dfrac{4\cdot x-5}{x-2}$ est équivalent à l'équation $x^3-2\cdot x^2-4\cdot x+5=0$

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 2 par $f(x)=\dfrac{4\cdot x-5}{x-2}$. Sa courbe représentative H dans un repère orthonormé est donnée en annexe à rendre avec la copie.

a. Par lecture graphique, indiquer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty\,;2[$ et $]2\,;+\infty[$.

b. Déterminer la dérivée f' de f puis justifier le résultat lu dans la question précédente.

3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2$. Tracer sa courbe représentative P dans repère utilisé pour H.

4. Par lecture graphique, déterminer le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3-2x^2-4x+5=0$.

Donner la valeur exacte ou une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune de ces solutions.

B - Méthode algébrique

1. Vérifier que, pour tout réel :

$$(x-1)(x^2-x-5)=x^3-2\cdot x^2-4\cdot x+5.$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=x^2-x-5$.

a. Etudier le sens de variation de h.

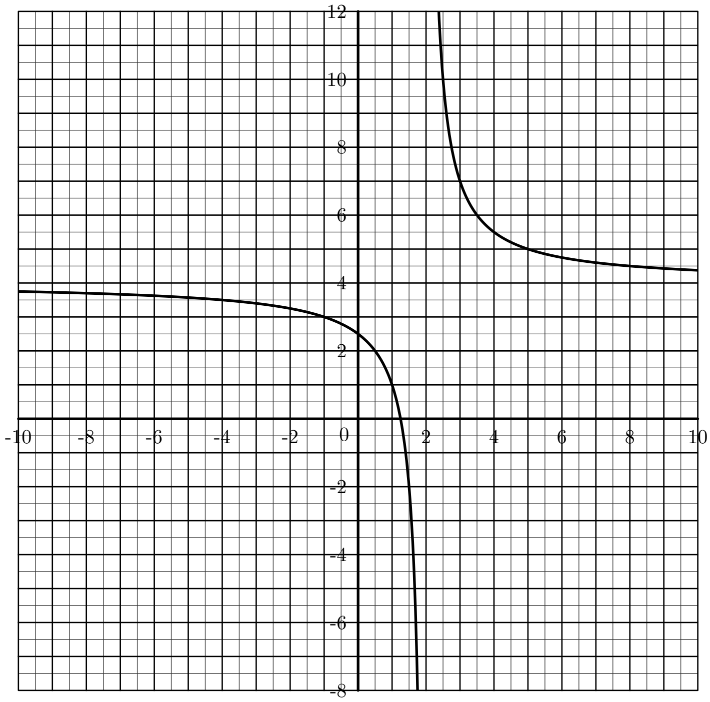
b. Montrer que $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$ est la valeur minimun prise par h.

c. On pose : $x=\dfrac{1}{2}+u$. Exprimer $h\left(\dfrac{1}{2}+u\right)$ en fonction de u ; factoriser l'expression obtenue.

d. En déduire les valeurs du réel x pour lesquelles $h(x)=0$.

3. Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x^3-2\cdot x^2-4\cdot x+5=0.$$



4. Tangentes :

Exercice 77

Un rectangle $ABCD$ a pour périmètre $10\,cm$.

Partie A

Dans cette partie, on pose $AB=x$ *(en cm)*

1. Dans quel intervalle fermé le réel x peut-il varier?

2. Exprimer l'aire $S(x)$ du rectangle $ABCD$ en fonction de x.

Partie B

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=-x^2+5\cdot x$.

1. En faisant appel à sa fonction dérivée f', dresser le tableau de variations de f.

2. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du rectangle $ABCD$ est maximale.

3. a. Dans le plan muni d'un repère orthonormé *(unité : 2 cm sur chaque axe)*, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f sur l'intervalle $[0\,;5]$.

b. Sur la même figure qu'au 3. a. tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1.

Exercice 1984

On considère la fonction : $f\,:\, x \mapsto \sqrt{-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3}$

1. Montrer l'égalité suivante :

$$(2{\cdot}x-1)(3-x) = -2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$$

2. a. Etudier le signe de $-2{\cdot}x^2+7{\cdot}x-3$ en fonction de la valeur de x.

   b. En déduire l'ensemble de définition et de dérivabilité de la fonction f.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de la fonction f.

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

