Term L spé/La congruence

1. Révisions sur nombres entiers et division euclidienne :

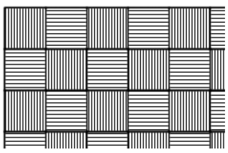
Exercice 26

1. Dîtes si les nombres suivants sont des cubes d'entier naturel :
   a. 9 b. 27
   c. $3^3 \times 7^3$ d. $11^9 \times 19^6 \times 67^3$ e. $2^2 \times 5^3 \times 11$
2. a. Trouver le nombre b tel que $180 \times b$ soit le cube d'un entier naturel
   b. Ce nombre b est-il unique?

Exercice 14

Dans une maison nouvellement construite, on veut carreler les sols de certaines pièces.

1. Le sol de la salle à manger est un rectangle de longueur $4{,}54\,m$ et de largeur $3{,}75\,m$. On veut carreler cette pièce avec des carreaux carrés de $33\,cm$ de côté.



On commence la pose par un "*coin*" de la pièce comme le suggère la figure ci-contre. Calculer le nombre de carreaux non découpé qui auront été posés.

2. Le sol de la cuisine est un rectangle de longueur $4{,}55\,m$ et de largeur $3{,}85\,m$.
   On veut carreler cette pièce avec un nombre entier de dalles carrées, sans aucune découpe.
   a. Donner la liste des diviseurs de 455 puis la liste des diviseurs de 385.
   b. Donner la liste des diviseurs communs à 455 et 385.
   c. Quel est alors le plus grand côté possible des dalles carrées à utiliser pour carreler cette cuisine?
3. On dispose de dalles rectangulaires de longueur $24\,cm$ et de largeur $15\,cm$.
   a. Donner la liste des multiples de 24 inférieurs à 400, puis la liste des multiples de 15 inférieurs à 400
   b. Donner la liste des multiples comuns à 24 et 15, inférieurs à 400.
   c. Quelle serait la longueur du côté de la plus petite pièce carrée qui pourrait être carrelée avec un nombre entier de dalles de ce type, sans aucune découpe?

2. Division euclidienne :

Exercice 1716

1. Déterminer la division euclidienne de 1038 par 17.
2. En étudiant le carré $(61 \times 17+1)^2$, déterminer le reste de la division euclidienne de 1038^2 par 17.
3. En déduire une conjecture sur, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de 1038^n par 17.

3. Congruence :

Exercice 27

1. a. Trouver les plus petits entiers naturels a, b, c vérifiant :
   $$100 \equiv a \pmod{4} \quad ; \quad 27 \equiv b \pmod{4} \quad ; \quad 95 \equiv c \pmod{4}$$
   b. En déduire le reste de la division euclidienne 27×100 par 4.
   Puis, le reste de 2 795 par 4
2. a. Calculer le reste de la division euclidienne de 10, 100, 1000 par 9.
   b. En déduire les plus petits entiers naturels a, b, c vérifiant :
   $$3 \times 1000 \equiv a \pmod{9} ; \ 7 \times 100 \equiv b \pmod{9} ; \ 8 \times 10 \equiv c \pmod{9}$$

c. Donner le reste de la division euclidienne de 3785 par 9

3. a. En utilisant une méthode équivalente à celle de la question 2., donner les plus petits entiers naturel a et b vérifiant :

$$318 \equiv a \pmod{9} \quad ; \quad 1\,203\,631 \equiv b \pmod{9}$$

b. En utilisant les propriétés de conservation de la congruence, montrer que le calcul ci-dessous est faux :

$$3\,785 \times 318 = 1\,203\,631$$

Exercice 19

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. On considère deux nombre entiers naturels a et b tel que :
   - a est congru à 10 modulo 23
   - b est congru à 15 modulo 23

   a. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à $(a+b)$ modulo 23.

   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à $a \cdot b$ modulo 23.

2. a. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 1000 modulo 111

   b. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $1000n$ est congru à n modulo 111.
   En déduire que le nombre 10^8+10^4+1 est divisible par 111.

4. Congruence et écriture décimale :

Exercice 18

Dans cet exercice on étudie la divisibilité par 11 en exploitant la congruence modulo 11 des puissances de 10

1. a. Vérifier que : $100 \equiv 1 \pmod{11}$.
   En déduire que : $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$

   b. Vérifier que : $10 \equiv -1 \pmod{11}$.
   En déduire que :
   - $10^3 \equiv -1 \pmod{11}$
   - $10^5 \equiv -1 \pmod{11}$

2. a. En utilisant l'égalité $3729=37\times100+29$ et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.

   b. En utilisant la méthode précédente, étudier la divisibilité de 9240 par 11

3. a. En utilisant l'égalité :
   $$3729 = 3\times1000 + 7\times100 + 2\times10 + 9$$
   et les résultats précédents, montrer que 3729 est divisible par 11.

   b. En utilisant cette méthode, étudier la divisibilité de 9240 par 11.

4. Etudier la divisibilité de 197 277 par 11.

Exercice 23

Le but de l'exercice est de prouver pour les entiers à quatre chiffres, le critère de divisibilité : "Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est elle-même divisible par 3".

1. Un exemple :

   a. Pour un entier naturel n, que signifie la phrase "*n est congru à 1 modulo 3*"?
   Traduire à l'aide d'une congruence "n est divisible par 3".

   b. Pour chacun des entiers suivants, donner l'entier positif le plus petit auquel il est congru modulo 3 : 10, 100, 1000, 10^p où est un entier positif.

   c. Déterminer le plus petit entier, positif auquel est congru l'entier 4520 modulo 3. On remarquera que :
   $$4520 = 4\times1000 + 5\times100 + 2\times10.$$

2. Quelques généralisations :
   On considère un entier N à quatre chiffres, quatre entiers a, b, c et d entre 0 et 9 tels que $a \neq 0$ et :
   $$N = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d.$$
   Le chiffre des unités est d, celui des dizaines est c, des centaines b et des milliers a.

   a. Montrer que : $N \equiv a+b+c+d$ modulo 3.

   b. Justifier, pour les entier à quatre chiffres, le critère de divisibilité par 3 énoncé au début de l'exercice.

   c. Enoncer un critère analogue de divisibilité par 9 et le démontrer pour les entiers à quatre chiffres.

Exercice 24

On note $\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d$ l'écriture d'un entier en base dix dont les chiffres sont a, b, c et d.

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, puis de 1000 par 11.

   b. Montrer que si un nombre entier n vérifie :
   $$n = 10 \pmod{11}$$
   alors on peut aussi écrire : $n=-1 \pmod{11}$

   c. En déduire que si $\overline{abcd}$ est divisible par 11 alors $-a+b-c+d$ est aussi divisible par 11.

2. a. Les entiers du type $\overline{abba}$ sont-ils divisible par 11?

   b. Pour quelle valeur de a, l'entier $\overline{1a1}$ est-il divisible par 11?

   c. Pour quelle valeur de a, l'entier $\overline{9a9}$ est-il divisble par 11?

3. A quelles conditions les entiers du type $\overline{aab}$ sont-ils divisibles par 11?

Exercice 1770

Un entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans e système de numération à base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-à-dire :

$$N = c{\times}5^3 + a{\times}5^2 + b{\times}5 + c$$

où a, b, c sont des entiers tels que :

$$0 < a < 5 \quad ; \quad 0 < b < 5 \quad ; \quad 0 < c < 5$$

Ce même nombre entier N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération à base huit.

1. Montrer que $N = 65{\cdot}a + 8{\cdot}b$ et en déduire que :

$$40{\cdot}a = 126{\cdot}c - 3b{\cdot}.$$

2. a. Justifier que $40{\cdot}a \equiv 0 \pmod{3}$. En déduire la valeur de a.
   b. Montrer que $b \equiv 0 \pmod{2}$. Déterminer les valeurs de b et c.
   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

5. Congruence et puissance :

Exercice 1849

1. a. Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des entiers 3^n pour $n \in \mathbb{N}$: $n \leqslant 6$.
   b. Recopier et compléter le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

   c. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.
2. a. Déterminer le plus petite entier naturel congru à 1515 modulo 7.
   b. Après avoir remarqué que $2004 = 6{\times}334$, déduire du 1. le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.
   c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7 le reste est 2.

Exercice 28

1. a. Montrer que 1999 est congru à 4 modulo 7.
   b. Déterminer le plus petit nombre entier naturel congru à 2007 modulo 7.
2. Soit n un nombre entier naturel congru à 5 modulo 7.
   a. Déterminer un nombre entier naturel congru à n^3 modulo 7.
   b. En déduire que $(n^3{+}1)$ est divisible par 7.
3. Montrer que si n est un nombre entier naturel congru à 4 modulo 7 alors $(n^3{-}1)$ est divisible par 7.
4. On considère le nombre : $A = 1999^3 + 2007^3$.
   Sans calculer A, montrer en utilisant les résultats précédents que A est divisible par 7.

Exercice 8

On considère le nombre entier $A = 18^{2002}$.

1. A est divisible par 9? Par 4? *(justifier les réponses)*
2. On cherche à obtenir le reste de la division euclidienne de A par 7, en utilisant des congruences.
   a. Trouver l'entier r vérifiant : $\begin{cases} 0 \leqslant r < 7 \\ 18 = r \pmod{7} \end{cases}$
   b. Quel est le plus petit entier naturel non nul n tel que : $r^n = 1 \pmod{7}$
   c. Prouver que pour tout nombre entier naturel k, 4^{3k} est congru à 1 modulo 7.
   d. En déduire le reste de la division euclidienne de A par 7.
3. Montrer que 2002^{18} est divisible par 13.

6. Clef de controle :

Exercice 15

Sur le catalogue d'une entreprise de vente par correspondance, la référence de chaque article d'un nombre à cinq chiffres $x\ y\ z\ t\ u$ *(le premier de ces chiffres x étant différant de zéro)*, suivi d'une lettre majuscule choisie antre A et N, à l'exception de la lettre I.
A cette lettre majuscule est associé un nombre appelé clé selon le tableau suivant :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K	L	M	N
Clé	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

A des fins du contrôle, on impose, pour chaque référence, que la somme du nombre à cinq chiffres et de la clef obtenie grâce au tableau, soit un nombre divisible par 13.

Par exemple considérons un artilce dont la référence est 18501M. Le nombre à cinq chiffres est 18501. La clé associée à M est 11 :

$$18501 + 11 = 18512 = 13{\times}1424.$$

18512 est divisible par 13, donc cette référence est correcte.

1. Les deux références suivantes sont-elles correctes?

   $13587M \quad ; \quad 45905A$

   Les réponses doivent être justifiées.
2. On veut retrouver la lettre d'une rétirence dont il ne reste que le nombre à cinq chiffres 26014.
   a. Montrer que : $13{\times}2001 < 26014 < 13{\times}2002$.
   b. En déduire la lettre manquante.

3. On veut retrouver un chiffre illisible dans la référence d'un article. Cette référence est $85z29C$ *(z étant le chiffre illisible)*

a. Montrer que le problème revient à trouver z tel que $0 \leqslant z \leqslant 9$ et :
$$8\times10^4+5\times10^3+z\times10^2+2\times10+9+2\equiv0 \pmod{13}$$
Cette relation sera notée (E) dans toute la suite.

b. Recopier et compléter le tableau suivant à l'aide d'entiers naturels compris entre 0 et 12.

- $10^0\equiv\ldots \pmod{13}$ $\qquad 10^1\equiv\ldots \pmod{13}$
- $10^2\equiv\ldots \pmod{13}$ $\qquad 10^3\equiv\ldots \pmod{13}$
- $10^4\equiv\ldots \pmod{13}$

c. En utilisant les propriétés des congruences et les résultats obtenus dans le tableau précédent, montrer que le problème revient à trouver z *($0\leqslant z\leqslant 9$)* tel que :
$11+9z\equiv \quad \pmod{13}$

d. Déterminer le chiffre illisible de la référence. Ecrire alors cette référence.

Exercice 1

Le code d'identification d'un article est formé de sept chiffres compris entre 0 et 9. les six premiers chiffres identifient l'article, le septième est une clé de contrôle destinée à déceler une erreur dans l'écriture des six premiers.

On notera $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$ un tel code. la clé de contrôle x_7 est le reste de la division euclidienne par 10 de la somme :
$N=(x_1+x_3+x_5)+7(x_2+x_4+x_6)$

1. a. Vérifier que le code suivant est correct : 2 3 4 1 5 4 7

b. Calculer la clé du code suivant : 9 2 3 4 5 1 •

c. Un des chiffres du code suivant a été effacé :
1 1 2 • 7 7 4.
Le calculer.

2. Dans cette question un des chiffres du code est erroné : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$,le dactylographe a frappé $x_1x_2x_3yx_5x_6x_7$

a. Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées respectivement aux deux codes précédents puis calculer la différences N_1-N_2

b. Montrer que l'équation $7a=0 \pmod{10}$ où a est un entier compris entre 0 et 9, a pour seule solution 0.

c. L'erreur de frappe sera-t-elle détectée?

3. Dans cette question, deux des chiffres du code ont été intervertis : au lieu de saisir $x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7$, le dactylographe a frappé $x_1x_3x_2x_4x_5x_6x_7$.

a. Ecrire les sommes N_1 et N_2 associées à ces deux codes, puis calculer la différence N_1-N_2.

b. Donner un exemple de valeurs de x_2 et x_3 pour lesquelles la clé de contrôle ne détecte pas l'erreur.

Exercice 3

Le numéro I.N.S.E.E. est constitué de 15 chiffres. En lisant de gauche à droite :

- Le premier chiffre est 1 s'il s'agit d'un homme, 2 s'il s'agit d'une femme ;
- les deux chiffres suivants désignent les deux derniers chiffres de l'année de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le mois de naissance ;
- les deux chiffres suivants désignent le département de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent la commune de naissance ;
- les trois chiffres suivants désignent le numéro d'inscription sur le registre civil ;
- les deux derniers chiffres désignent la clé K, calculée de la manière suivante :
  - Soit A le nombre entier constitué par les 13 chiffres de gauche,
  - soit r le reste de la division euclidienne de A par 97,
  - alors $K=97-r$

Les 13 premiers chiffres *(sans clé)* du nombre $I.N.S.E.E.$ de Sophie sont $2\,850\,786\,183\,048$. On note A ce nombre et r le reste de la division euclidienne de A par 97.

1. Donner le mois de l'année de naissance de Sophie.

2. a. Déterminer les deux entiers a et b tels que :
$A=a\times10^6+b \quad$ avec $0\leqslant b<10^6$.

b. En utilisant le reste de 100 dans sa division euclidienne par 97 ; montrer que : $10^6\equiv27 \pmod{97}$

c. En déduire le reste r de la division euclidienne de A par 97.

3. Déterminer la clé K du numéro I.N.S.E.E. de Sophie.

4. Sophie, à qui l'on demande les **treize** premiers chiffres de son numéro I.N.S.E.E., inverse les deux derniers chiffres et répond $2\,850\,786\,183\,084$ à la place de $2\,850\,786\,183\,048$.

On note B la réponse de Sophie.

a. Calculer la différence $B-A$ et en déduire que le reste de la division euclidienne de B par 97 est égal à 21.

b. L'erreur faite par Sophie peut-elle être détectée ?

Exercice 1851

Le code barre à 13 chiffres ou EAN 13 *(European Article Number)* est un code constitué de 13 chiffres compris entre 0 et 9, utilisé pour classifier les produits de la grande distribution :

$$a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}$$

On calcule :

$$S=a_1+3a_2+a_3+3a_4+a_5+3a_6+a_7+3a_8+a_9 \\ +3a_{10}+a_{11}+3a_{12}+a_{13}$$

Le code est accepté lorsque : $S\equiv0 \pmod{10}$.
Il est refusé sinon.

1. En pratique.
On considère le code $A=9\,780\,130\,515\,186$.

a. Vérifier que A est accepté.

b. Au lieu du code A, on saisi le code $B=9\,770\,130\,515\,186$ en commettant une erreur sur le troisième chiffre. Montrer que le code B est refusé.

c. Lors de la saisie du code A, deux chiffres voisins ont été permutés.
Le code $C = 9\,780\,135\,015\,186$ est-il accepté ou refusé?
Le code $D = 9\,780\,130\,155\,186$ est-il accepté ou refusé?

2. Effet d'une erreur de s aisie sur le quatrième chiffre.

a. On désigne par E le code $9\,78n\,130\,515\,186$ où n représente un chiffre. Si $n=0$, on retrouve le code A donc E est accepté.
Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles E est accepté.

b. En déduire qu'une ererur de saisie sur le quatrième chiffre du code A est toujours détectée.

7. Codage :

Exercice 21

Les codes secrets des cartes bancaires sont formés de quatre chiffres pris de 0 à 9.

Pierre n'a pas noté celui de sa carte bancaire dans son agenda, mais comme il a peur de l'oublier, il a quand même noté la forme "*cryptée*" de son code secret de façon que son code secret ne soit pas découvert si son agenda était perdu.

Pierre réalise toujours son cryptage de la façon suivante :

- Il choisit deux chiffres a et b, appelés "*clés du cryptage*", qui vont lui servir à tout le cryptage.
- Il remplace chaque chiffre n de son code secret par le chiffre p, appelée forme cryptée de n, qu'il calcule à l'aide de la formule suivante :
  $p \equiv a \times n + b \pmod{10}$

L'objectif de la partie **A** est de retrouver le code secret de la carte bancaire de Pierre, connaissant les clés de cryptage.

L'objectif de la partie **B** est de retrouver les clés de cryptage.

Les parties **A** et **B** sont donc indépendantes.

Partie A

Pierre a choisi ici : $a = 3$; $b = 7$

Alors : $p \equiv 3 \times n + 7 \pmod{10}$

Par exemple, la forme cryptée du chiffre 5 sera le chiffre 2.
Car : $3 \times 5 + 7 = 22$; $22 \equiv 2 \pmod{10}$

1. Reproduire et compléter la table de cryptage ci-dessous correspondant à la formule de Pierre.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p				6	9	2			1	

2. Pierre a inscrit 8 5 0 3 dans son agenda qui est la forme cryptée de son code secret, quel est son véritable code secret?

Partie B

Pierre a fait des émules.

Quentin utilise la même formule que Pierre :
$p \equiv a \times n + b \pmod{10}$
mais en prenant deux autres valeurs de a et b parmi les chiffres de 0 à 9.

Pierre prétend pouvoir déterminer la formule de Quentin *(c'est-à-dire trouver les nombres a et b)* car ce dernier lui a avoué les formes cryptées de deux chiffres :

- La forme cryptée du chiffre 3 est le chiffre 3
- La forme cryptée du chiffre 4 est le chiffre 2

1. Etablir que découvrir a et b revient à résoudre le système d'inconnue $(a\,;b)$:

$$\begin{cases} 3a + b \equiv 3 \pmod{10} \\ 4a + b \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

où a et b sont des chiffres de 0 à 9.

2. Pierre prétend que le couple $(9\,;6)$ est une solution de ce système. Montrer qu'il a raison

Exercice 4

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés.
Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p $(1 \leqslant p \leqslant 26)$ obtenue à l'aide de la formule

$p = 3 \times n + 7 \pmod{26}$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car :
$3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 = 17 \pmod{26}$.

1. Reproduire et compléter la table de cryptage ci-dessous *(aucune justification n'est demandée)*.

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p												17		
forme cryptée	J											Q		

lettre	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p										1		
forme cryptée										A		

2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : *MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV*.
Retrouver la forme décryptée du message.

3. Wilson désire lui répondre : *MERCI*.
Donner la forme cryptée de ce message.

Exercice 17

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

Nathalie communique avec une amie en fabriquant des messages codés. Chaque lettre de l'alphabet est repérée par son rang x, $1 \leqslant x \leqslant 26$: 1 pour A, 2 pour B, etc...

La lettre de rang x est codée par la lettre de rang y tel que :

$$1 \leqslant y \leqslant 26 \quad ; \quad y \equiv x+10 \pmod{26}$$

Exemples :
La lettre V a pour rang $x=22$; on a :
$1 \leqslant y \leqslant 26 \quad ; \quad y \equiv 32 \pmod{26}$
donc $y=6$. La lettre V est codée par la lettre F.

1. Recopier et dresser le tableau ci-dessous pour toutes les lettres de l'alphabet.

Lettre	A	....	V	....
x	1		22	
y	11		6	
Codage	K		F	

2. Retrouver le codage du mot "*ARITHMETIQUE*".

3. Décoder le mot "*OEBY*".

Partie II

1. Remarquant que $999=27\times37$, démontrer que :
$$10^3 \equiv 1 \pmod{37} \quad ; \quad 10^{30} \equiv 1 \pmod{37}$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :
$$10^{3n} \equiv 1 \pmod{37}.$$

3. En déduire que l'entier $N=10^{10}+10^{20}+10^{30}$ est un multiple de 37.
(On pourra remarquer que $10^{10}=10^9\times10$).

Exercice 11

Le célèbre tableau de DAVID : "Le sacre de Napoléon" immortalise l'événement du 2 décembre 1804.
Sur la période considérée, toutes les années dont le millésime est multiple de 4 sont bissextiles, sauf l'année 1900.

Considérons le 2 décembre 1804 comme le jour de rang 1

1. a. Combien y-a-t-il d'années dont le millésime est compris entre 1805 *(inclus)* et 2003 *(inclus)* ?

   b. Parmi ces années, montrer qu'il y a 48 années bissextiles

2. Prouver que le rang du 1^er^ janvier 2004 est 72714.

3. Déterminer l'entier a compris entre 0 et 6 inclus tel que :
$$72\,714 = a \pmod{7}.$$

4. Sachant que le 1^er^ janvier 2004 était un jeudi, recopier et compléter le tableau suivant où k désigne un nombre entier.

Rang du jour	$7k$	$7k+1$	$7k+2$	$7k+3$	$7k+4$	$7k+5$	$7k+6$
Jour de la semaine							

5. Quel jour de la semaine, Napoléon 1^er^ a-t-il été sacré empereur?

Exercice 25

Une année bissextile compte 366 jours et une année non bissextile 365 jours. Une année est bissextile si son "numéro" est divisible par 4 sauf s'il s'agit d'un siècle.
Les siècles, années dont le "numéro" se termine par deux zéros, ne sont, en général, pas bissextiles sauf si leur "numéro" est divisible par 400.
Quelques exemples : 1996 était bissextile, 1997 ne l'était pas, 1900 non plus mais 2400 le sera.

1. Trouver les deux entiers naturels a et b inférieurs ou égaux à 6 tels que :
$$365 \equiv a \pmod{7} \quad ; \quad 366 \equiv b \pmod{7}$$

2. a. En supposant que le premier janvier d'une année non bissextile soit un lundi, expliquer pourquoi le premier janvier de l'année suivante sera une mardi.

   b. Si le premier janvier d'une année bissextile est un lundi, quel jour de la semaine sera le premier janvier de l'année suivante?

3. Une période de quatre années consécutives compte :
$N = 3\times365 + 1\times366$.
Sans calculer N, justifier que $N \equiv 5 \pmod{7}$

4. En supposant que le premier janvier d'une année soit un ludi, quel jour de la semaine sera le premier janvier qutre ans plus tard? Expliquer la réponse.
Plus généralement, pour une date donnée, (par exemple le 1^er^ janvier), chaque période de 4 années produit un décalage de cinq jours dans le cycle des jours de la semaine.

5. Compléter le tableau ci dessous. Aucune justification n'est demandée.

Nombres de périodes de quatre années	J = nombre de jours de décalage dans le cycle des jours de la semaine	Reste de la division de J par 7
0	0	0
1	5	5
2	10	3
3		
4		
5		
6		
7		

6. a. Expliquer pourquoi l'année 2004 est bissextile.

   b. Sachant que le 29 février 2004 était un dimanche, quel jour de la semaine sera le 29 février 2008?

c. Quelle sera la prochaine année où le 29 février sera un dimanche? Expliquer la réponse.

9. Raisonnement par récurrence :

Exercice 1769

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on considère le nombre entier :
11^n+5^n-7

1. a. Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10?

   b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$:
   $$11^n\equiv 1 \pmod{10}.$$

2. Démontrer que, pour tout nombre entier $n\geqslant 1$,
   $$5^n\equiv 5 \pmod{10}.$$
   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité)

3. Quel est le chiffre des unités de l'entier $11^{2007}+5^{2007}-7$? Justifier la réponse donnée.

