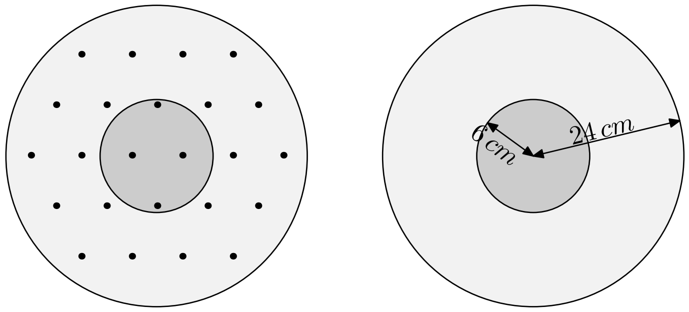
Terminale ES/Loi continue

1. Introduction aux lois continues :

Exercice 7381

On considère l'expérience aléaoire suivante qui consiste à lancer une flechette au hasard vers une cible. Pour les besoins de la modélisation, on suppose qu'à chaque lancer, la fléchette se loge dans la cible.



Cible A Cible B

1. On considère la cible A en plastique où les flechettes en plastique touchant la cible viennent se loger dans un des trous représentés sur la figure de manière équiprobable.

   Quelle est la probabilité que la fléchette se loge dans le rond central de la cible?

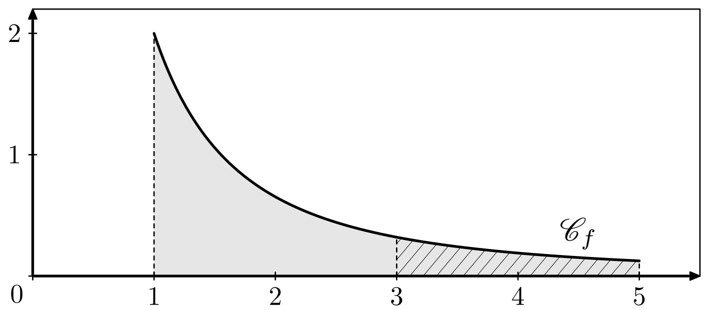
2. On considère la cible A en liège où les flechettes munies d'une pointe d'acier peuvent se loger n'importe où sur la cible de manière équiprobable.

   Quelle est la probabilité que le tireur place la fléchette sur le rond central de la cible?

Exercice 7382

On représente ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $\big[1\,;5\big]$ par la relation :

$$f(x) = \frac{32}{(3x+1)^2}$$



On considère un jeu de lancer de fléchettes se basant sur la surface grisée définie par :

- l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}_f$;
- les droites d'équations $x=1$ et $x=5$.

En supposant qu'à chaque lancer, la fléchette au hasard tombe dans cette partie grisée, on souhaite connaître la probabilité que la fléchette atteigne la zone hachurée limitée par les deux droites $x=3$ et $x=5$.

Pour cela, on considère la variable aléaoire $\mathcal{X}$ qui associe à chaque fléchette lancée l'abscisse de son point de reception sur la cible.

1. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée au millième des intégrales ci-dessous :
   $$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Déterminer une valeur approchée de la probabilité : $\mathcal{P}\big(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant5\big)$

2. Loi continue et calculatrice :

Exercice 7383

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{40}\cdot x + \dfrac{1}{5} & \text{pour } x\in\big[0\,;4\big] \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f définit une loi à densité sur l'intervalle $\big[0\,;4\big]$. On utilisera la calculatrice pour déterminer la valeur approchée de l'intégrale :
   $$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Notons $\mathcal{X}$ la variable aléatoire définie sur $\big[0\,;4\big]$ dont la loi de probabilité a pour densité f. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée des probabilités suivantes :

   a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant2)$ c. $\mathcal{P}\Big(\dfrac{1}{2}\leqslant\mathcal{X}<3\Big)$

3. Loi uniforme :

Exercice 7395

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée :

Si $\mathcal{X}$ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;1]$, alors $\mathcal{P}(0{,}1\leqslant\mathcal{X}\leqslant 0{,}6)=0{,}6$

Exercice 7396

Parmi les quatre propositions présentées, une seule est correctes. Donner la réponse exacte.

On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en minutes, suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;60]$

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min.

a. $\dfrac{1}{3}$ b. 0,2 c. $\dfrac{1}{12}$ d. 0,25

4. Loi uniforme et espérance :

Exercice 7837

Parmi les réponses proposées, une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Dans une station de ski, le temps d'attente à un télésiège donné, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

a. L'espérance de cette loi $\mathcal{X}$ est $\dfrac{2}{5}$

b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}>2)=\dfrac{3}{5}$

c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)=\dfrac{3}{5}$

d. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 5)=0$

5. Loi normale centrée réduite et calculatrice :

Exercice 7398

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

A l'aide de la calculatrice de la calculatrice, compléter les pointillés par les valeurs approchées au millième des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$ b. $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$ c. $\displaystyle\int_{-9}^{9} f(x)\,\mathrm{d}x=\ldots$

Exercice 7399

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi de probabilité de moyenne 0 et d'écart-type 1. A l'aide de la calculatrice, donner les valeurs des probabilité suivantes arrodies au millième :

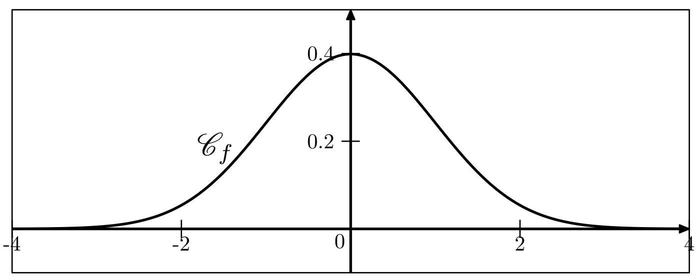
a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant -1)$ b. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$ c. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 1)$

6. Loi normale centrée réduite, propriétés et calculatrice :

Exercice 7401

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1.

1. Donner la valeur de : $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 0)$.
2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la densité f de la variable aléatoire $\mathcal{X}$:



a. Interpréter graphiquement le nombre $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$.

b. A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée au millième du nombre $\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 2)$

c. En déduire une valeur approchée de la probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$ au millième près.

7. Loi normale et calculatrice :

Exercice 7403

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi normale de moyenne 10 et d'écart-type 3 .

A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes arrondies au millième près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 9)$ b. $\mathcal{P}(0\leqslant\mathcal{X}\leqslant 12)$

Exercice 7845

En janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Pour gérer les flux des visiteurs, une partie de l'enquête a porté sur la durée d'une visite de ce musée. Il a été établi que la durée D d'une visite, en minutes, suit la loi normale de moyenne $\mu=90$ et d'écart-type $\sigma=15$.

1. Déterminer $\mathcal{P}(90\leqslant D\leqslant 120)$ puis interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Le directeur précise qu'il augmentera la capacité d'accueil de l'espace restauration du musée si plus de 2 % des visiteurs restent plus de 2 heures et 30 minutes par visite. Quelle sera alors sa décision?

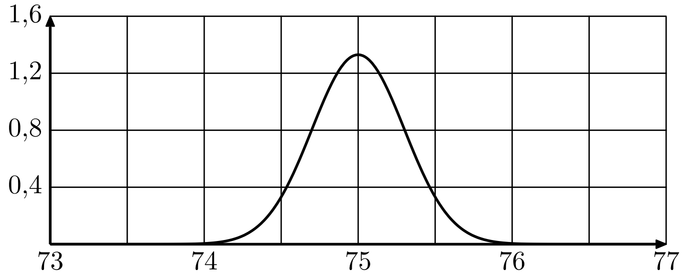
8. Loi normale et propriété de la moyenne :

Exercice 7442

Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3}.

Une entreprise fabrique en grande quantité des médailles circulaires.

Le diamètre exprimé en millimètre, d'une médaille fabriquée par cette entreprise est conforme lorsqu'il appartient à l'intervalle $[74{,}4\,;75{,}6]$.
On note $\mathcal{Y}$ la variable aléatoire qui, à chaque médaille prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre en millimètre. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{Y}$ sui une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 0,25.
La courbe ci-dessous est la représentation graphique de la densité de probabilité de $\mathcal{Y}$.



1. Indiquer par lecture graphique la valeur de μ.
2. Déterminer à l'aide de la calculatrice la probabilité $\mathcal{P}(74{,}4\leqslant\mathcal{Y}\leqslant 75{,}6)$.

9. Loi normale et propriété de symétrie :

Exercice 7404

On considère une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type 2.

On donne la valeur approchée de la probabilité suivante :
$\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 4)\approx 0{,}691$

Sans l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 3)$ b. $\mathcal{P}(3\leqslant\mathcal{X}\leqslant 4)$

c. $\mathcal{P}(2\leqslant\mathcal{X}\leqslant 3)$ d. $\mathcal{P}(\mathcal{X}\leqslant 2)$

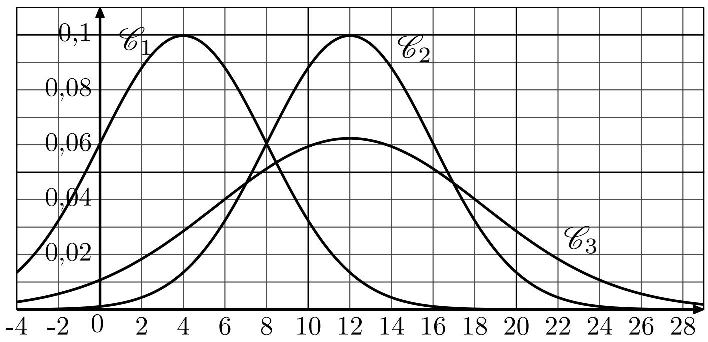
10. Loi normale et comparaison graphique :

Exercice 7391

L'AFDIAG a fait une enquête et a constaté que la maladie coeliaque était diagnostiquée en moyenne 11 ans après les premiers symptômes.

On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire représentant le temps en années mis pour diagnostiquer la maladie coeliaque à partir de l'apparition des premiers symptômes.

On admet que la loi de $\mathcal{X}$ peut être assimilée à la loi normale d'espérance $\mu=12$ et d'écart-type $\sigma=4$.



1. Justifier que la courbe $\mathscr{C}_1$ n'est pas la courbe de la densité de la variable aléatoire $\mathcal{X}$.

2. a. A l'aide de la calculatrice, déterminer la probabilité $\mathcal{P}(10 \leqslant \mathcal{X} \leqslant 12)$.

b. Des deux courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$, laquelle est la courbe représentative de la densité de $\mathcal{X}$.

11. Loi normale, écart-type et intervalle centrée :

Exercice 7843

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur.

Un étui est considéré conforme si son épaisseur est comprise entre 19,8 mm et 20,2 mm.
Le fournisseur souhaite qu'au moins 95 % des étuis produits soient conformes. Pour cela, il veut vérifier les réglages des machines de production.
On choisit un étui au hasard dans la production du fournisseur.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire associée à l'épaisseur *(en mm)* de l'étui. On admet que $\mathcal{X}$ sui une loi normale d'espérance 20 mm.

1. En observant les réglages des machines de production, le fournisseur B constate que l'écart-type de $\mathcal{X}$ est égal à 0,2.
Justifier qu'il faut revoir les réglages des machines.

2. Déterminer une valeur de l'écart-type de $\mathcal{X}$ pour laquelle la probabilité qu'un étui soit conforme est environ égale à 0,95.

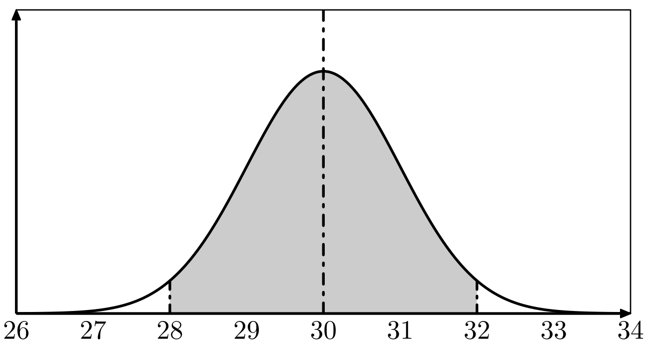
Exercice 7491

Une clé est dite conforme pour la lecture lorsque sa vitesse de lecture, exprimée en $^{Mo}/_{s}$, appartient à l'intervalle $[98\,;103]$.
Une clé est dite conforme pour l'écriture lorsque sa vitesse d'écriture exprimée en $^{Mo}/_{s}$ appartient à l'intervalle $[28\,;33]$.

1. On note $\mathcal{R}$ la variable aléatoire qui, à chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse de lecture. On suppose que la variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$.
Calculer la probabilité qu'une clé soit conforme pour la lecture.

2. On note $\mathcal{W}$ la variable aléatoire qui, chaque clé prélevée au hasard dans le stock, associe sa vitesse d'écriture. On suppose que la variable aléatoire $\mathcal{W}$ suit une loi normale.

Le graphique ci-après représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{W}$.



L'unité d'aire est choisie de façon à ce que l'aire sous la courbe soit égale à un et l'aire grisé est environ égale à 0,95 unité d'aire. La droite d'équation $x = 30$ est un axe de symétrie de la courbe.

Déterminer l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathcal{W}$. Justifier

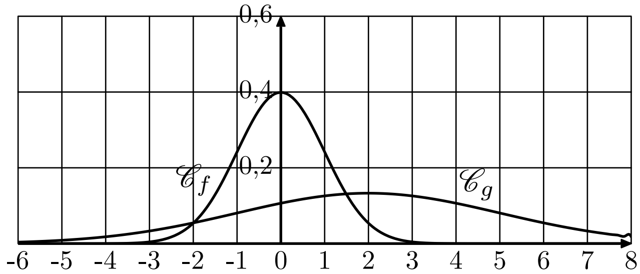
Exercice 7437

Pour la proposition ci-dessous, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

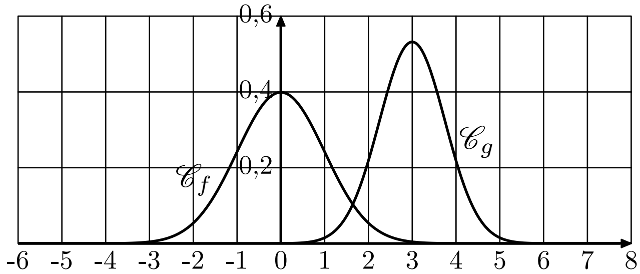
La fonction f est la fonction densité de probabilité associée à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;\,1)$. La fonction g est la fonction de densité de probabilité associée à la loi normale de moyenne $\mu = 3$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

La représentation graphique de ces deux fonctions est :

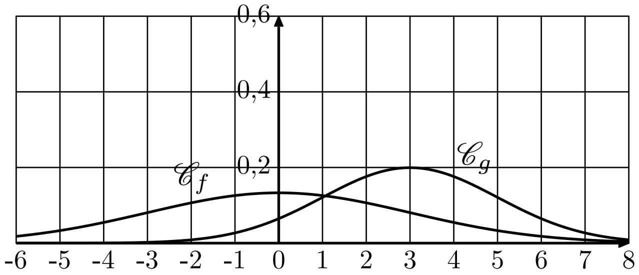
a.



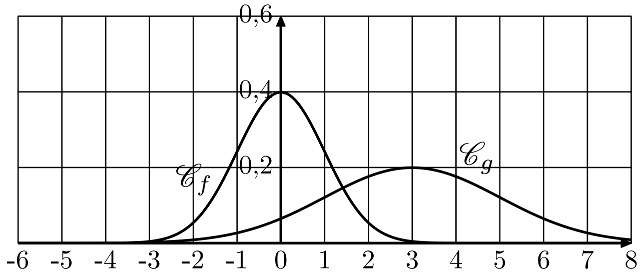
b.



c.



d.



12. Loi normale et probabilité conditionnelle :

Exercice 7489

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone qu'il vient de s'offrir de type T_1.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.
On admet que la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=48$ et d'écart-type $\sigma=10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est à dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans?

13. Loi normale inverse :

Exercice 7834

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.
On suppose que le temps en minute mis par un marathonien pour finir le marathon de Tartonville est modélisé par une variable aléatoire $\mathcal{T}$ qui suit une loi normale d'espérance $\mu=250$ et d'écart type $\sigma=39$.

- Calculer : $\mathcal{P}(\mathcal{T}\leqslant 300)$
- Par la méthode de votre choix, estimer la valeur du nombre réel t, arrondi à l'unité, vérifiant : $\mathcal{P}(\mathcal{T}\geqslant t)=0,9$.
- Interpréter le résultat obtenu dans le cadre de l'exercice.

Exercice 7167

Des bateaux électriques sont équipés d'une batterie d'une autonomie moyenne de 500 minutes.
Les batteries des bateaux sont rechargées uniquement à la fin de chaque journée d'utilisation.
On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire correspondant à la durée de fonctionnement de la batterie d'un bateau, exprimée en minutes. On admet que $\mathcal{X}$ suit la loi normale d'espérance $\mu=500$ et d'écart-type $\sigma=10$.

On souhaite connaitre la durée d'utilisation, en minutes, par jour de chaque bateau afin que seuls 1 % des bateaux soient déchargés avant la fin de la journée.

14. Intervalle de fluctuation asymptotique :

Exercice 7842

Une entreprise spécialisée dans la personnalisation des étuis de smartphones fait ses achats chez un fournisseur qui lui garantit 94 % d'étuis non défectueux.

Un employé de l'entreprise prélève un échantillon de 400 étuis qui proviennent de son fournisseur.
Il constate que 350 de ces étuis ne sont pas défectueux.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des étuis défectueux dans un échantillon aléatoire de 400 étuis provenant du fournisseur.
   On donnera des valeurs approchées au millième des bornes de cet intervalle.
2. Faut-il informer le fournisseur d'un problème?

Exercice 7836

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Parmi les quatre réponses proposées , une seule est exacte. Laquelle? Justifier votre réponse.

A l'occasion de son inauguration, un hypermarché offre à ses clients un ticket à gratter par tranche de 10 euros d'achats. L'hypermarché affirme que 15 % des tickets à gratter sont gagnants, c'est à dire donneront droit à un bon d'achat de 5 euros.

Amandine a reçu 50 tickets à gratter après un achat de 500 euros dans cet hypermarché. Deux d'entre eux étaient gagnants.

On suppose que le nombre de tickets à gratter est suffisamment important pour considérer qu'un échantillon de 50 tickets correspond à un tirage aléatoire avec remise.

a. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}051\,;0{,}249]$, les bornes étant arrondies au millième.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence observée de tickets gagnants dans un échantillon de 50 tickets à gratter est $[0{,}100\,;0{,}200]$, les bornes étant arrondies au millième.

c. La fréquence de tickets gagnants reçus par Amandine est $\dfrac{50}{500}$.

d. Amandine peut annoncer avec un risque de 5 % que l'affirmation de l'hypermarché n'est pas mensongère.

Exercice 7839

Un responsable d'auto-école affirme que pour l'année 2016, la probabilité d'être reçu à l'examen est égale à 0,62.
Ayant des doutes sur cette affirmation, une association d'automobilistes décide d'interroger 400 candidats à l'examen parmi ceux de 2016. Il s'avère que 220 d'entre eux ont effectivement obtenu le permis de conduire.

1. Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de candidats reçus dans un échantillon aléatoire de 400 candidats.

2. Peut-on émettre des doutes sur l'affirmation du responsable de cette auto-école?
Justifier votre réponse.

Exercice 7840

Les résultats seront arrondis au millième près.

Sur la devanture de son magasin, le gérant du supermarché affiche :

"*Plus de 90 % des clients de notre magasin sont satisfaits par la mise en place de nos caisses automatiques*"

Une association de consommateurs souhaite examiner cette affirmation. Pour cela, elle réalise un sondage : 860 clients sont interrogés, et 763 d'entre eux se disent satisfaits par la mise en place de ces caisses automatiques.

Cela remet-il en question l'affirmation du gérant?

Exercice 7844

En Janvier 2015, le directeur d'un musée d'art contemporain commande une enquête concernant les habitudes des visiteurs.

Sur l'ensemble des musées d'art contemporain, 22 % des visiteurs sont de nationalité étrangère. Sur un échantillon aléatoire de 2 000 visiteurs du musée considéré précédemment, 490 visiteurs sont de nationalité étrangère.
Que peut-on en conclure le directeur de ce musée? Argumenter.

15. Intervalle de confiance :

Exercice 7835

Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Une entreprise fabrique des tubes métalliques de largeur $2\,m$. Un tube métallique est considéré conne étant dans la norme si sa longueur est comprise entre $1{,}98\,m$ et $2{,}02\,m$. On prélève au hasard un échantillon de 1 000 tubes, on observe que 954 tubes sont dans la norme.

L'intervalle de confiance de la fréquence des tubes dans la norme pour cette entreprise au niveau de confiance de 95 %, avec les bornes arrondies à 10^{-3} est :

a. $[0{,}922\,;\,0{,}986]$

b. $[0{,}947\,;\,0{,}961]$

c. $[1{,}98\,;\,2{,}02]$

d. $[0{,}953\,;\,0{,}955]$

16. Intervalle de confiance et amplitude :

Exercice 7833

Parmi les questions ci-desssous, une seule des réponses proposées est correcte. Laquelle? Justifier votre réponse.

Une enquête sanitaire a pour objectif d'estimer la proportion de personnes qui respectent le calendrier de vaccinations préconisé par le Haut Conseil de la Santé Publique. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude 0,01 au niveau de confiance 0,95 de cette proportion, il faut interroger :

a. 200 personnes

b. 400 personnes

c. 10 000 personnes

d. 40 000 personnes

Exercice 7838

Un article de journal affirme, qu'en France, il y a 16 % de gauchers. Un chercheur souhaite vérifier cette affirmation. Pour cela, il veut déterminer la taille de l'échantillon de la population française à étudier qui permettrait d'obtenir un intervalle de confiance d'amplitude égale à 0,1 au niveau de confiance de 0,95. La taille de l'échantillon est :

a. 30

b. 64

c. 100

d. 400

