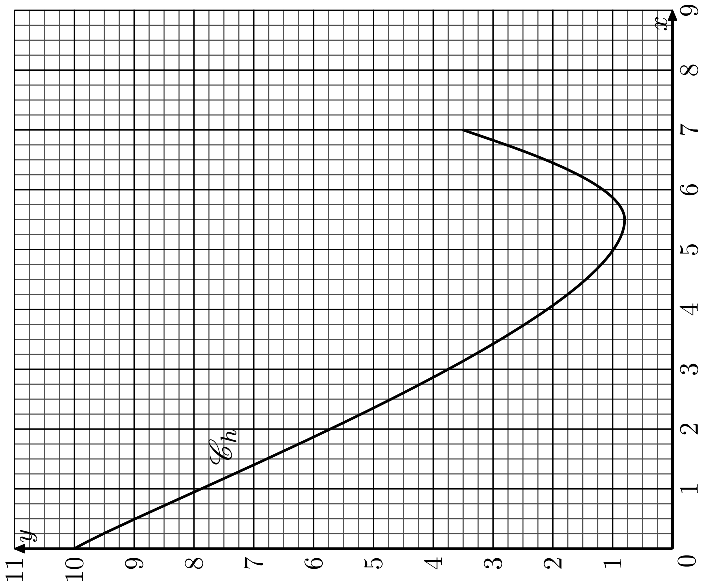
Compiler exercice   Compiler correction   Plus d'option

Terminale ES/Intégrale et primitive

1. Encadrement d'aires :

Exercice 7010

On considère la fonction h définie sur $[0\,;7]$ et représentée par la courbe ci-dessous :



Parmi les propositions ci-dessous, une seule est exacte. Laquelle?

a. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = h(5)-h(0)$

b. $\displaystyle 20<\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x<30$

c. $\displaystyle 15 < \int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x < 20$

d. $\displaystyle\int_0^5 h(x)\,\mathrm{d}x = 20$

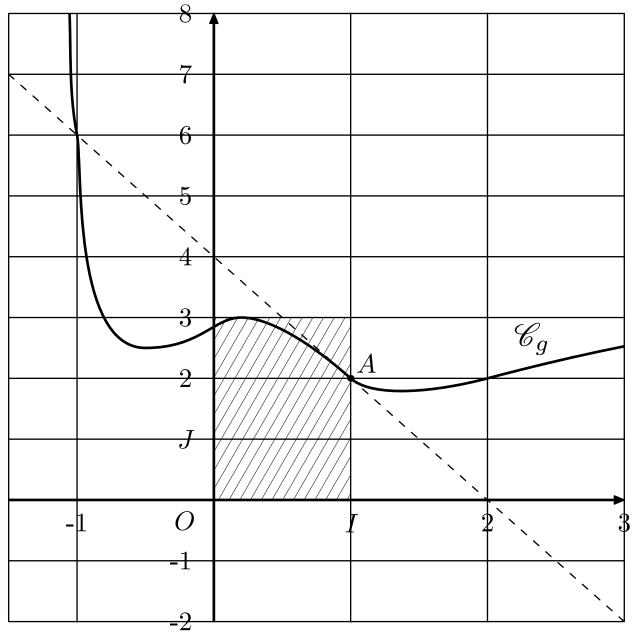
Exercice 7030

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

On rappelle que $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g.

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



- **Affirmation 1 :** $g'(1) = -2$
- **Affirmation 2 :** $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x < 3$

2. Détermination de primitives :

Exercice 7751

Compléter les pointillés :

1. On note f une fonction vérifiant : $f'(x)=2\cdot x$.
Une expression possible de f est :

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

2. On note g une fonction vérifiant : $g'(x) = x^2$.
Une expression possible de g est :

$g(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

3. On note h une fonction vérifiant : $h'(x) = -2$.
Une expression possible de h est :

$h(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

4. On note j une fonction vérifiant : $j'(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
Une expression possible de j est :

$j(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

5. On note k une fonction vérifiant : $k'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
Une expression possible de k est :

$k(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

6. On note ℓ une fonction vérifiant : $\ell'(x) = \mathrm{e}^x$.
Une expression possible de ℓ est :

$\ell(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

7. On note m une fonction vérifiant : $m'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Une expression possible de m est :

$m(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exercice 7753

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x + 1$ b. $g(x) = 1 - 3x$ c. $h(x) = 2x^2$
d. $i(x) = x^2 + x + 1$ e. $j(x) = 4x^3$ f. $k(x) = 1 - 2x^2$

Exercice 7752

Pour chaque question, déterminer l'expression d'une fonction f admettant pour dérivée l'expression proposée :

a. $f'(x) = 3$ b. $f'(x) = 2x + 1$ c. $f'(x) = x^3$
d. $f'(x) = -\dfrac{2}{x}$ e. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ f. $f'(x) = \mathrm{e}^{2x}$

3. Calcul d'intégrales et recherche de primitives :

Exercice 7015

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3\,;13]$ par :
$f(x) = -2x + 20 - \mathrm{e}^{-2x+10}$

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_3^{13} f(x)\,\mathrm{d}x$.
On donne la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3}.

4. Calcul d'intégrales : utilisation des primitives :

Exercice 7535

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\,;70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.
Ainsi, $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.
On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.

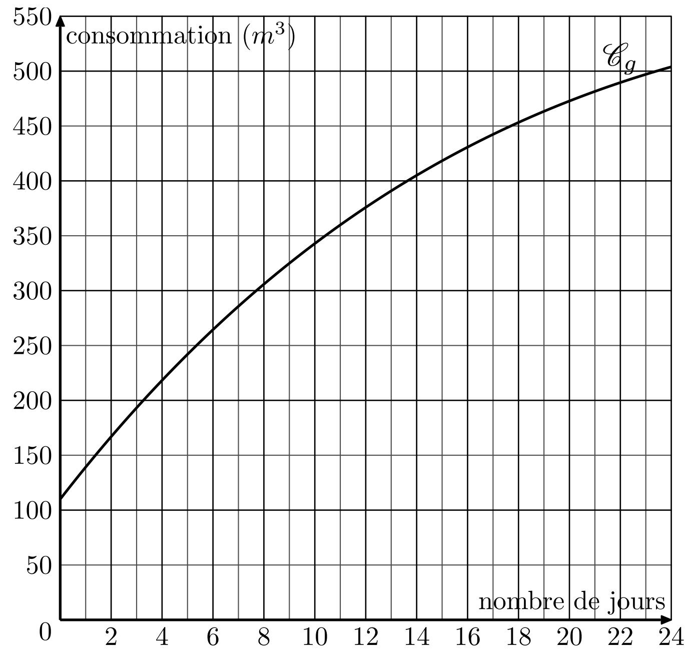
On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$g(x) = 110 + 11{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1^{er} juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\,;70]$ par :
$G(x) = 110{\cdot}x - \big(440{\cdot}x + 17\,600\big){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}025\cdot x+1}$

On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10^{e} au 20^{e} jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe $\mathscr{C}_g$ ci-dessous, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.

2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10^{e} au 20^{e} jour.



Exercice 7021

On considère la fonction f définie sur $]0\,;15]$ par :
$f(x) = 9{\cdot}x^2{\cdot}(1-2{\cdot}\ln x)+10$

On donne la fonction F définie sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$ par :
$F(x) = 10{\cdot}x+5{\cdot}x^3-6x^3{\cdot}\ln x$

1. Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0\,;1{,}5]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_1^{1{,}5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   On donnera le résultat arrondi au centième.

Exercice 7732

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\,;10]$ par : $f(x)=(x+4){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}5{\cdot}x}$

On considère la fonction F définie par :
$F(x)=(-2{\cdot}x-12){\cdot}\mathrm{e}^{-0{,}5{\cdot}x}$.

1. Comment peut-on montrer que F est une primitive de f sur l'intervalle $[-4\,;10]$? *On ne demande pas d'effectuer cette vérification.*
2. Calculer : $S=\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$
   On en donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

Exercice 7728

On admet que la fonction f est définie par :
$f(x) = (x^2-2{\cdot}x+1){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient les résultats ci-dessous qui pourront être utilisés sans être démontrés :

L1	`f(x):=(x^2-2x+1)*e^(-2x+6)` $\rightarrow f(x) = (x^2-2{\cdot}x+1){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L2	`f'(x):=Dérivée[f(x)]` $\rightarrow f'(x) = (-2{\cdot}x^2+6{\cdot}x-4){\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L3	`g(x):=Dérivée[f'(x)]` $\rightarrow g(x) = -16{\cdot}x{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}+4{\cdot}x^2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}+14{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}$
L4	`Factoriser[g(x)]` $\rightarrow 2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+6}{\cdot}(2{\cdot}x^2-8{\cdot}x+7)$
L5	`Résoudre[g(x)=0]` $\rightarrow \left\{x=\dfrac{-\sqrt{2}+4}{2}\,;\,x=\dfrac{\sqrt{2}+4}{2}\right\}$
L6	`F(x):=Primitive[f(x)]` $\rightarrow F(x) = \dfrac{1}{4}{\cdot}(-2{\cdot}x^2+2{\cdot}x-1){\cdot}\mathrm{e}^{-2{\cdot}x+6}$

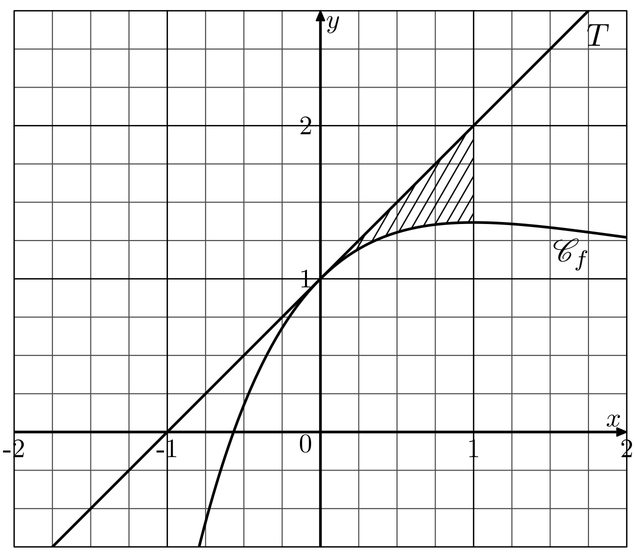
On pose $I=\displaystyle\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

5. Aire entre deux courbes :

Exercice 7770

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x{\cdot}\mathrm{e}^{-x}+1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.



1. a. Montrer que, pour tout réel x : $f'(x)=\mathrm{e}^{-x}{\cdot}(1-x)$
   b. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : $y=x+1$.

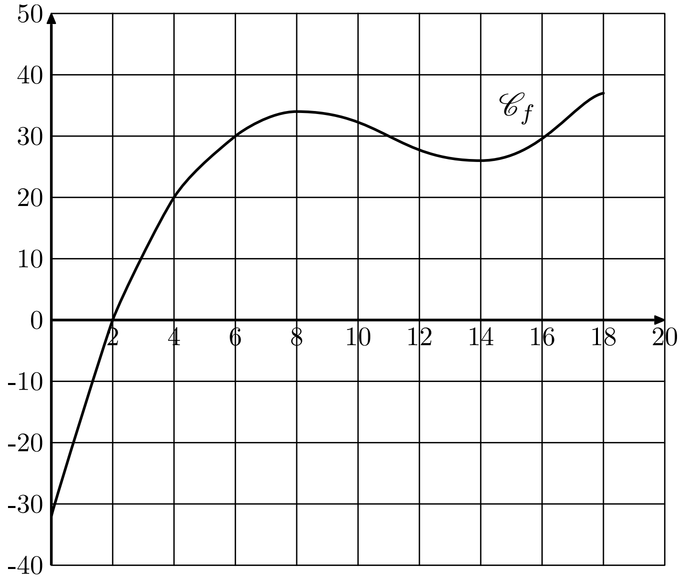
On admet que la tangente T est située au dessus de la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.
   a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
      $F(x) = \mathrm{e}^{-x}{\cdot}(-1-x)+x$
      Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

6. Propriétés des primitives :

Exercice 7018

On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[0\,;18]$:



Laquelle des réponses ci-dessous est correcte?

a. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[0\,;2]$.

b. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont négatives sur l'intervalle $[8\,;12]$.

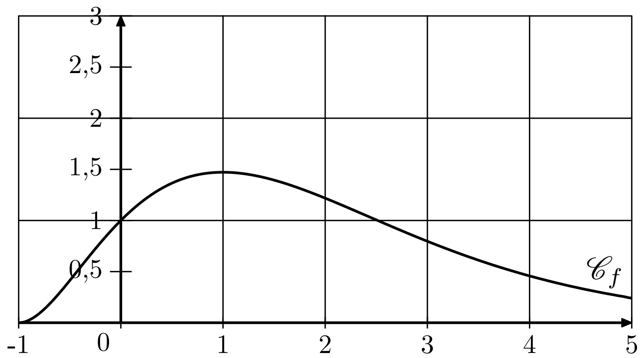
c. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[0\,;2]$.

d. Toutes les primitives de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$ sont croissantes sur l'intervalle $[8\,;12]$.

7. Etudes de fonctions :

Exercice 7039

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\,;5]$.
On note f' la fonction dérivée de f.



1. On admet que la fonction F définie sur $[-1\,;5]$ par :
   $F(x) = -\left(x^2+4\cdot x+5\right)\cdot e^{-x}$
   est une primite de la fonction f.
   a. En déduire l'expression de $f(x)$ sur $[-1\,;5]$.
   b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de l'aire du domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.
2. Montrer que sur l'intervalle $[1\,;5]$, l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution.

8. Moyenne :

Exercice 7768

Dans cet exercice, on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels *(redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos,...)*.

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x, par :
$f(x) = -0{,}0032\cdot x^3 + 0{,}06\cdot x^2 + 5$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995+n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.
2. Déterminer le pourcentage p, de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.

   (Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul $p = \frac{\textit{valeur réelle-valeur estimée}}{\textit{valeur réelle}}$ *et le résultat sera donnée à* $0,1\,\%$ *près.)*
3. En utilisant la fonction f, quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013? *(On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).*
4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1^{er} janvier 1995 et le 1^{er} janvier 2015.

   On calcule pour cela : $M = \dfrac{1}{20} \cdot \displaystyle\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$

   a. Déterminer une primitive de F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;20]$.

   b. Calculer M.

