Compiler exercice Compiler correction Plus d'option

Terminale ES/Fonctions exponentielles

1. Rappels :

Exercice 7469

Simplifier les expressions suivantes :

a. $2^4 \times 2^3$ b. $\dfrac{5^8}{5^3}$ c. $(3^2)^4$

d. $3^4 \times 9^3$ e. $\dfrac{4^9}{2^5}$ f. $2^5 - 2^4$

Exercice 7470

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier n positif ou nul par :

- $u_n = 2{,}6^n$
- $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 1{,}8 \cdot v_n$

1. Donner les élèments caractéristiques des suites (u_n) et (v_n).
2. Compléter le tableau de valeurs, en arrondissant au millième près :

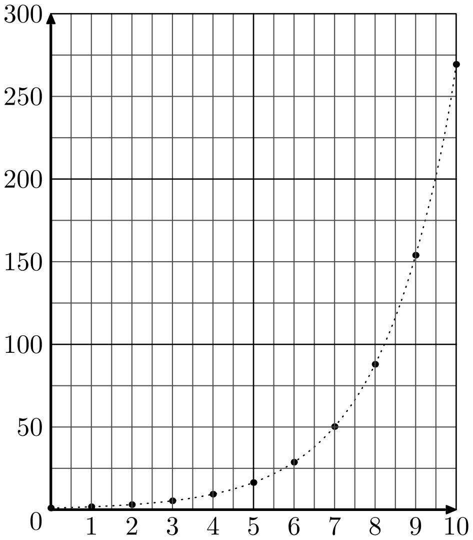
n	0	1	2	3	4	5
u_n						
v_n						

2. Introductions aux fonctions exponentilles :

Exercice 7471

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison 1,75 définie pour tout entier naturel n positif ou nul.

Ci-dessous est donné, le tableau de valeurs des onze premiers termes de la suite arrondies au millième près et leur repésentation graphique associée :



	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	3,063
5	3	5,359
6	4	9,379
7	5	16,413
8	6	28,723
9	7	50,265
10	8	87,964
11	9	153,937
12	10	269,389

1. a. Donner la valeur du produit $u_2 \times u_5$.
   La valeur du résultat pouvait-il être prévu ? Justifier.

   b. Sans calcul, donner la valeur du produit $u_6 \times u_3$.
2. En pointillé, a été tracée la courbe reliant les points $(n\,;u_n)$. Notons $\mathscr{C}$ cette courbe et notons f la fonction ayant pour représentation la courbe $\mathscr{C}$.

   a. Donner la valeur des images : $f(1)$; $f(3)$
   Vérifier que : $f(1+3) = f(1) \times f(3)$.

   b. Par lecture graphique, déterminer les images des nombres 4,5 et 6,5.
   Vérifier l'égalité : $f(2) \times f(4{,}5) = f(6{,}5)$

Exercice 7472

On considère les fonctions cinq fonctions ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$:

$f : x \longmapsto 0{,}2^x$; $g : x \longmapsto 0{,}95^x$; $h : x \longmapsto 1^x$

$j : x \longmapsto 1{,}5^x$; $k : x \longmapsto 3^x$

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer le ou les sens de variation de chacune de ces fonctions.
2. Quelles similitudes peut-on trouver entre ces différentes fonctions?

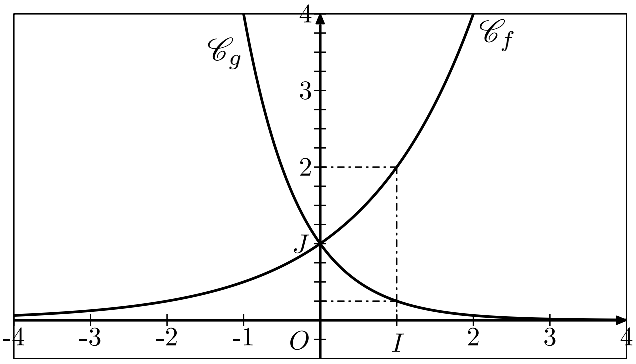
3. Fonctions exponentielles de base a :

Exercice 7473

On considère les deux fonction f et g admettant chacune une expression de la forme :

$$f: x \longmapsto q^x \quad ; \quad g: x \longmapsto q'^x \qquad \text{où } q,\, q' \in \left]0\,;+\infty\right[$$

Les fonctions f et g sont des fonctions exponentielles respectivement de base q et q'.



1. Par observation du sens de variation de chacune des fonctions f et g. Que peut-on dire de la base q de chacune d'elles?

2. Graphiquement et par l'image du nombre 1, déterminer l'expression des fonctions f et g.

Exercice 7474

On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$f(x) = 2^x - x^2 \quad ; \quad g(x) = -x + 2$$

Dans un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectivement des fonctions f et g.

A l'aide de la calculatrice, déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

4. Fonction exponentielle :

Exercice 7476

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^3 \cdot e^4$

b. $e^4 \cdot e^{-4}$

c. $\left(e^4\right)^3 \cdot e^4$

d. $\dfrac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$

e. $\left(e^5 - e^4\right)^2 - \left(e^5 + e^4\right)^2$

f. $\dfrac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

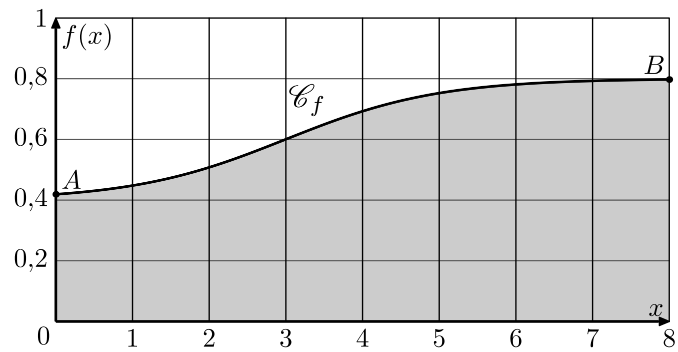
Exercice 7027

On considère la fonction définie sur $\left[0\,;8\right]$ par :

$$f(x) = \frac{0{,}4}{20{\cdot}e^{-x} + 1} + 0{,}4$$

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse

Proposition 1
L'altitude du village B est $0{,}6\,km$.

Proposition 2
L'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.

5. Dérivées :

Exercice 7479

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = e^x$

b. $f(x) = e^{2\cdot x}$

c. $f(x) = e^{3-x}$

d. $f(x) = e^{2-x^2}$

e. $f(x) = e^{x^2+1}$

f. $f(x) = e^{x^2+x+1}$

Exercice 7032

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \big(x+1\big){\cdot}e^{-2x+3}.$$

Parmi les quatre propositions proposées, laquelle est vraie? La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

a. $f'(x) = -2{\cdot}\mathrm{e}^{-2x+3}$ b. $f'(x) = \mathrm{e}^{-2x+3}$

c. $f'(x) = (-2x+3)\mathrm{e}^{-2x+3}$ d. $f'(x) = (-2x-1)\mathrm{e}^{-2x+3}$

Exercice 7431

On considère un fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On donne les informations suivantes sur la fonction f :

$f(0) = 3 \quad ; \quad f'(1) = 0 \quad ; \quad f'(0) = 0{,}5$

On admet qu'il existe trois réels a, b, c pour lesquels la fonction f définie ci-dessus est définie, pour tout x de $[-3\,;2]$, par :

$f(x) = \big(a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c\big){\cdot}\mathrm{e}^x + 5.$

1. En utilisant une des informations précédentes, justifier que $c=-2$.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\,;2]$, par :

$f'(x) = \big[a{\cdot}x^2 + (2{\cdot}a + b){\cdot}x - 2 + b\big]{\cdot}\mathrm{e}^x$

En utilisant les informations précédentes, justifier que $b=2{,}5$ puis que $a=-1$.

6. Dérivées et quotient :

Exercice 7478

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{0{,}5 + 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \frac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{\big(0{,}5 + 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\big)^2}$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{0{,}5 + 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}$$

On note g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = \frac{-50{\cdot}\mathrm{e}^{-x}}{\big(0{,}5 + 100{\cdot}\mathrm{e}^{-x}\big)^2}$$

7. Etude de fonctions :

Exercice 7006

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$g(x) = -0{,}6{\cdot}x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée :

1. a. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.

   b. En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.

2. a. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

   b. Le tableau de variations permet d'affirmer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$.
   Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

   c. Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

Exercice 7432

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$, par :

$f(x) = \big(x+2\big){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2\,;4]$, on a :
   $f'(x) = -(x+1){\cdot}\mathrm{e}^{-x+1}$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

8. Théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 7521

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :

$f(x) = \big(-2{\cdot}x + 30\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2{\cdot}x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x) = \big(-0{,}4{\cdot}x+4\big){\cdot}\mathrm{e}^{0{,}2{\cdot}x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$. On précisera la valeur exacte du maximum de f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α.

   b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

9. Théorème des valeurs intermédiaires et quotient :

Exercice 7435

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;25]$ par :

$$f(x)=10-\frac{e^{0,2x+1}}{x}$$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

f(x) :10 - e^(0.2 x+1)/x

$$x\longmapsto 10-\frac{\exp(0.2x+1)}{x}$$

factoriser(deriver(f(x)))

$$\frac{\exp\left(0.2\cdot x+1\right)\cdot\left(1-0.2\cdot x\right)}{x^2}$$

factoriser(deriver(deriver(f(x))))

$$\frac{\exp\left(0.2\cdot x+1\right)\cdot\left(-x^2+10\cdot x-50\right)}{25\cdot x^3}$$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisé de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Etudier le signe de f' sur l'intervalle $[1\,;25]$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[1\,;25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1\,;5]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5\,;25]$.
   c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α

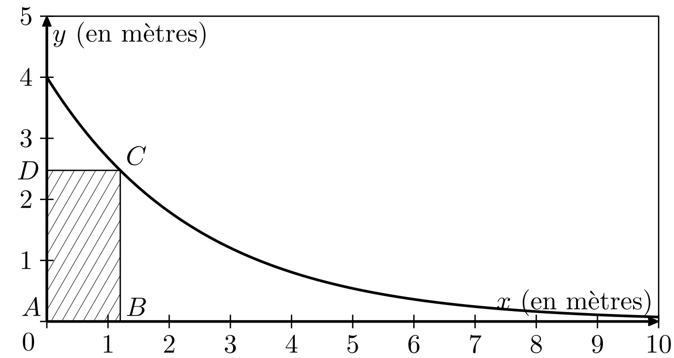
10. Autour des aires :

Exercice 7031

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau publicitaire rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$f(x)=4\cdot e^{-0,4x}$

Cette courbe $\mathscr{C}_f$ est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe $\mathscr{C}_f$.

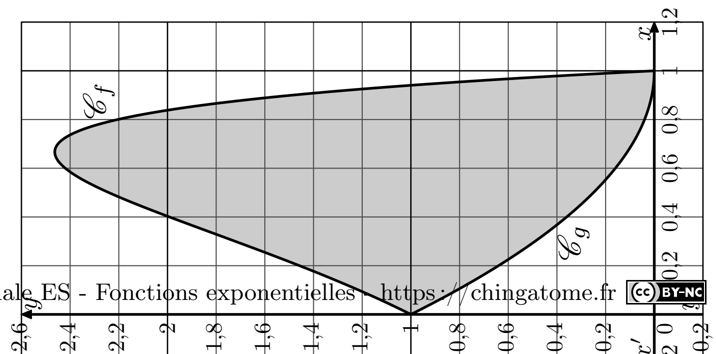
On suppose que le point B a pour abscisse $x=2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3{,}6\,m^2$.

11. Inégalités :

Exercice 7523

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies pour tout réel x de $[0\,;1]$ par :

$f(x)=\left(1-x\right)\cdot e^{3x}\quad;\quad g(x)=x^2-2\cdot x+1$



1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1;0)$ et $(0;1)$ sont des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

2. On admet que :pour tout x dans $[0;1]$:
$$f(x) - g(x) = (1-x)\left(e^{3x} - 1 + x\right)$$

   a. Justifier que pour tout x dans $[0\,;\,1]$:
   $$e^{3\cdot x} - 1 \geqslant 0$$

   b. En déduire que pour tout x dans $[0;1]$:
   $$e^{3\cdot x} - 1 + x \geqslant 0$$

   c. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ pour tout x dans $[0;1]$.

