

Terminale ES/Fonction logarithme népérien

1. Dérivées :

Exercice 7003



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = 3 \cdot x - x \cdot \ln x$

On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.

Parmi les trois réponses ci-dessous, laquelle est exacte?

- a. $f'(x) = 3 - \frac{1}{x}$ b. $f'(x) = 3 - \ln x$
 c. $f'(x) = 2 - \ln x$

Exercice 7009



On note g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :
 $g(x) = (x + 1) \cdot \ln(x)$

Parmi les réponses ci-dessous, laquelle est correcte?

- a. $g'(x) = \frac{1}{x}$ b. $g'(x) = 1 + \ln(x)$
 c. $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ d. $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln(x)$

Exercice 7392



Parmi les quatre réponses proposées, une seule est exacte. Préciser laquelle en justifiant votre réponse.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :
 $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$

On note f' sa fonction dérivée.

On a alors :

- a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) = \ln(x)$
 c. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ d. $f'(x) = \frac{1}{x} - x$

2. Etude de fonctions :

Exercice 7646



Définition - proposition

La fonction **logarithme népérien**, notée \ln est définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et admet le tableau de variations :

x	0	1	e	$+\infty$
Variation de f				

$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$

De plus, sa fonction dérivée a pour expression :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

- Dresser le tableau de signe de la fonction logarithme népérien.
- On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln(x)$$

- Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f .
- Etablir le tableau de signes de la fonction f'
- Préciser les sens de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 7433



On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 10]$ par :
 $f(x) = -x \cdot \ln x + 2 \cdot x + 1$

- Calculer $f'(x)$.
- Démontrer que la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $]0; 10]$.
- Calculer la valeur exacte du maximum de la fonction f sur ce même intervalle.

3. Théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 7441

Une entreprise produit et vend des composants électroniques. Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1; 30]$ par :

$$B(x) = -0,5 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 20 + 2x \cdot \ln x$$

1. Montrer que : $B'(x) = -x + 8 + 2 \cdot \ln x$ où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1; 30]$.
2. On admet que $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1; 30]$. Justifier le tableau de variations ci-dessous de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1; 30]$.

x	1	2	30
Variation de $B'(x)$		$6+2 \ln 2$	
	7		$-22+2 \ln 30$

3. a. Montrer que l'équation $B'(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 30]$.
b. Donner une valeur approchée au millième de la valeur de α .
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1; 30]$, et donner le tableau de variations de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal? Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros)?

4. Propriétés algébriques :**Exercice 7701**

Une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée.

La valeur exacte de $\ln(10 \cdot e^2)$ est :

- a. $2 \cdot \ln(10) + 2$
- b. 4,302 585 093
- c. $\ln(10) + 2$
- d. $2 \cdot \ln(10 \cdot e)$

Exercice 7744

Parmi les quatre propositions, une seule est exacte. Recopier

la proposition exacte sans justification :

Pour tout réel $x < 0$, le nombre réel $\ln\left(-\frac{1}{x}\right)$ est égal à :

- a. $\ln(x)$
- b. $-\ln(-x)$
- c. $-\ln(x)$
- d. $\frac{1}{\ln(x)}$

Exercice 7846

Dire si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée.

Pour tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^3) - \ln(a^2) = \ln(a^{25}) - \ln(a^{24})$$

5. Résolution d'équations :**Exercice 7519**

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

La solution de l'équation $x^{23} = 92$ est égale à :

- a. 4
- b. 1,2
- c. $e^{\frac{\ln(92)}{23}}$
- d. $e^{\frac{\ln(23)}{92}}$

Exercice 7847

Dire si l'affirmation ci-dessous est vraie ou fausse. Justifier la réponse donnée.

L'équation $x \cdot \ln(x) = 2 \cdot \ln(x)$ admet exactement deux solutions 2 et 1 sur $]0; +\infty[$.

6. Résolution d'équations et propriétés algébriques :**Exercice 7692**

Parmi les quatre propositions ci-dessous, une seule est correcte. Laquelle?

La solution exacte de l'équation $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$ est :

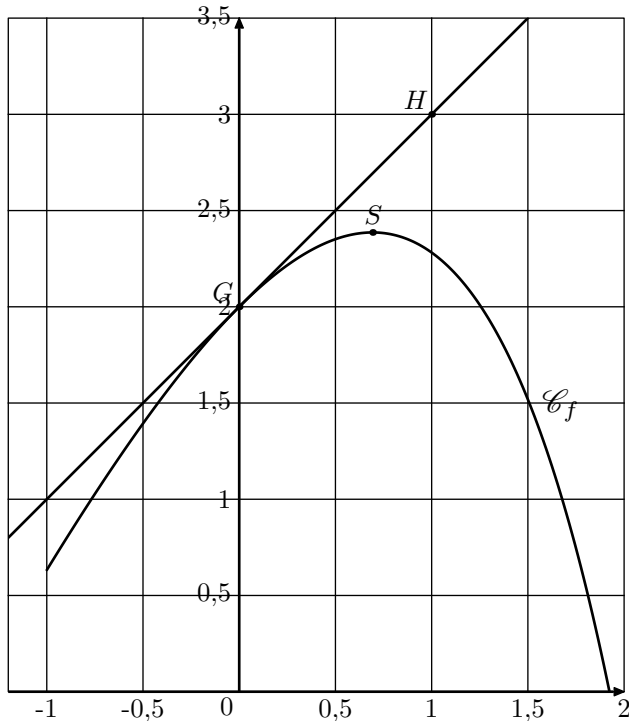
- a. 1,74
- b. $\frac{\ln(10) - \ln(3)}{\ln(2)}$
- c. $-\frac{\ln(3)}{\ln(5)}$
- d. 0,5

7. Résolution d'inéquations : graphiquement :

Exercice 7053



La courbe (\mathcal{C}) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1; 2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Le point G a pour coordonnées $(0; 2)$.

Le point H a pour coordonnées $(1; 3)$.

La droite (GH) est la tangente à la courbe (\mathcal{C}) au point G .

La courbe (\mathcal{C}) admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $\ln 2$.

Aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1; 2]$ l'inéquation $f'(x) \leq 0$.

8. Résolution d'inéquations :

Exercice 7691



Résoudre dans $[0; 10]$ l'inéquation : $100 \cdot e^{-x} - 0,5 \geq 0$

Exercice 7045



Parmi les quatre propositions ci-dessous, laquelle est vraie?

Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003$ sont tous les nombres entiers n tels que :

- a. $n \geq 8$ b. $n \geq 9$
c. $n \leq 8$ d. $n \leq 9$

Exercice 7210



Dans une exploration forestière, les arbres coupés dans cette forêt sont utilisés pour le chauffage. Le prix d'un stère de bois (*unité de volume mesurant le bois*) augmente chaque année de 3%.

Au bout de combien d'années le prix d'un stère de bois aura-t-il doublé?

Exercice 7034



On rappelle que \mathbb{N} est l'ensemble des entiers naturels.

Résoudre dans \mathbb{N} l'inéquation :

$$12\,000 - 2\,000 \times 0,75^n \geq 11\,950$$

Exercice 7746



On considère la suite (u_n) dont les termes sont définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 700 - 100 \times 0,7^n$$

1. Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geq 697$ est équivalent à $0,7^n \leq 0,03$.
2. Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

```

N ← 0
U ← 1
Tant que U > 0,03
  N ← N+1
  U ← 0,7 × U
Fint Tant que
    
```

Donner la valeur de la variable N à la fin de l'exécution de cet algorithme.

3. Retrouver ce résultat en résolvant l'inéquation : $0,7^n \leq 0,03$.

9. Résolution d'inéquations et étude de fonctions :

Exercice 7014



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[3; 13]$ par :

$$f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$$

1. Montrer que la fonction dérivée f' , de la fonction f , définie pour tout x de l'intervalle $[3; 13]$, a pour expression :

$$f'(x) = 2 \cdot (-1 + e^{-2x+10})$$

2.
 - a. Résoudre dans l'intervalle $[3; 13]$ l'inéquation :
 $f'(x) \geq 0$
 - b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[3; 13]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Les valeurs du tableau seront, si besoin, arrondies à 10^{-3} .

10. Résolution d'inéquations et suites :

Exercice 7700



On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$$

1. Déterminer les deux premiers termes de cette suite.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
3. Les termes de la suite (u_n) dépasseront-ils la valeur 30? Si oui, pour quel rang la première fois cette valeur sera-t-elle dépassée?

11. Problèmes :

Exercice 7747



Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1.
 - a. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $a\%$ où a est un nombre entier.
 - b. Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation : $x^{12} = 9,79$. Interpréter ce nombre en ter-

mes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $b\%$ où b est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 20]$ par :
 $f(x) = 27\,131 \cdot \ln(x) + 0,626 \cdot x^3$
où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.
 - a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2; 20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur $[2; 20]$.
 - b. A l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020? Justifier.