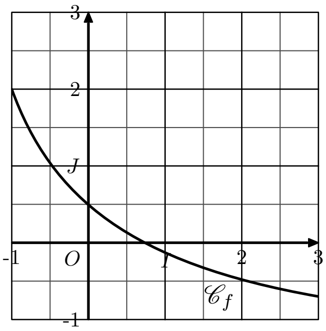
Compiler exercice | Compiler correction | Plus d'option

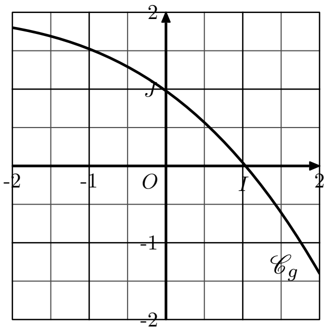
# Terminale ES/Convexité

## 1. Introduction :

### Exercice 7788

On considère les deux fonctions $f$ et $g$ décroissantes représentées ci-dessous :




Laquelle de ces deux courbes décroit "*de moins en moins*"?

### Exercice 7795

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression :
$f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{0,5 \cdot x+1}$

Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f''$, dérivée seconde de la fonction $f$.

### Exercice 7797

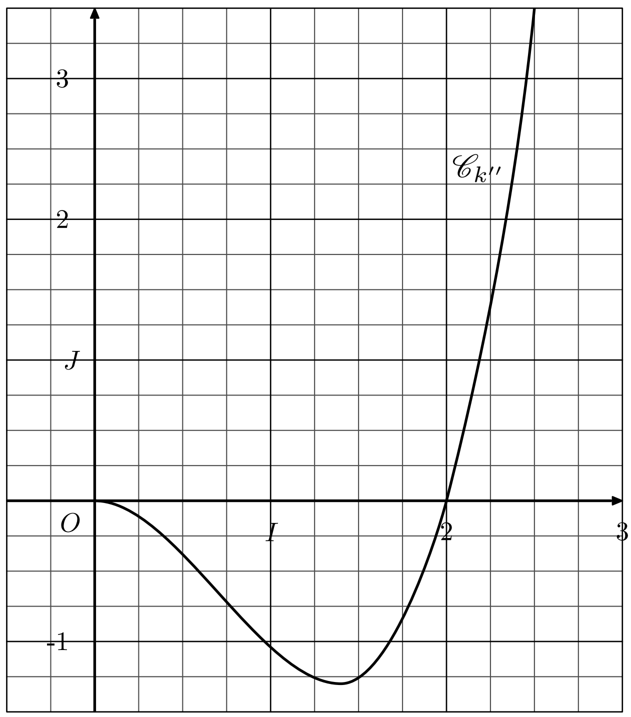
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x \cdot e^{x^2-3}$

Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f''$, dérivée seconde de la fonction $f$.

## 2. Convexité : graphiquement :

### Exercice 7011

On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde $k''$ d'une fonction $k$ définie sur $[0\,;+\infty[$.




Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1. $k$ est concave sur l'intervalle $[1\,;2]$.
2. $k$ est convexe sur l'intervalle $[0\,,2]$.
3. $k$ est convexe sur $[0\,;+\infty[$.
4. $k$ est concave sur $[0\,;+\infty[$.

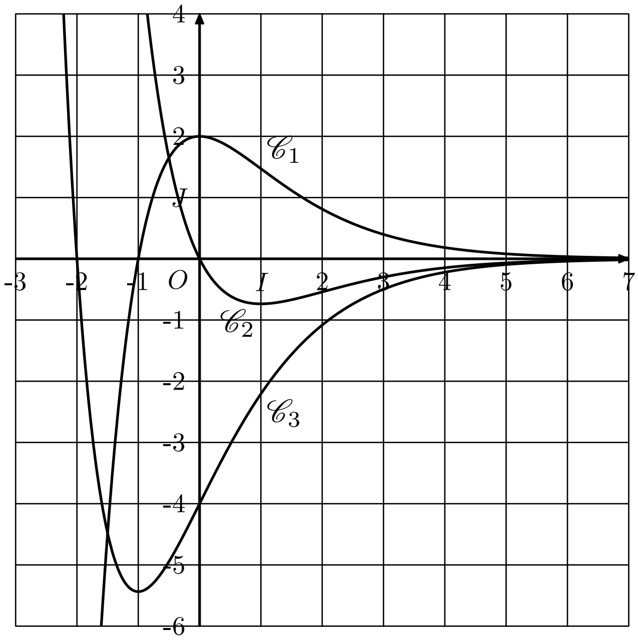
### Exercice 7054

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ définies sur $[-3\,;7]$ ont été représentées.
L'une de ces fonctions représente une fonction $f$, une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction $f$.

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe.




## 3. Convexité : étude de fonctions :

### Exercice 7730

*Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.*

La fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-9\cdot x$ est convexe sur l'intervalle :

a. $\big]-\infty\,;+\infty\big[$  b. $\big[0\,;+\infty\big[$

c. $\big]-\infty\,;0\big]$  d. $\big[-3\,;3\big]$

### Exercice 7793

On considère la fonction $f$ définie, pour tout réel $x$ de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$ par : $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x+1}$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.

1. Montrer que, pour tout $x$ de l'intervalle $\big[-2\,;4\big]$, on a : $f'(x)=-(x+1)\cdot e^{-x+1}$

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

| | |
|---|---|
| 1 | factoriser$\big($dériver$\big[-(x+1)*\exp(-x+1)\big]\big)$<br>$x*\exp\,(-x+1)$ |
| 2 | intégrer$\big[(x+2)*\exp(-x+1)\big]$<br>$-(x+3)*\exp\,(-x+1)$ |

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe. Justifier.

### Exercice 7026

Soit $f$ la fonction définie sur $\big[0\,;\,8\big]$ par :

$$f(x)=\frac{0{,}4}{20\cdot e^{-x}+1}+0{,}4$$

1. Montrer que $f'(x)=\dfrac{8\cdot e^{-x}}{\big(20\cdot e^{-x}+1\big)^2}$ où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 | `f'(x):=8*e^(-x)/(20*e^(-x)+1)^2`<br>$f'(x):=\dfrac{8\cdot e^{-x}}{400\big(e^{-x}\big)^2+40\cdot e^{-x}+1}$ |
| 2 | `g(x):=Dérivée[f'(x)]`<br>$g(x):=\dfrac{160\cdot\big(e^{-x}\big)^2-8\cdot e^{-x}}{8000\cdot\big(e^{-x}\big)^3+1200\cdot\big(e^{-x}\big)^2+60\cdot e^{-x}+1}$ |
| 3 | `Factoriser[g(x)]`<br>$8\cdot e^{-x}\cdot\dfrac{20\cdot e^{-x}-1}{\big(20\cdot e^{-x}+1\big)^3}$ |

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe.

## 4. Convexité et positions des tangentes :

### Exercice 7794

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\big]0\,;10\big]$ par :
$f(x)=-x\cdot\ln\big(x\big)+2\cdot x+1$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle $\big]0\,;\,10\big]$.

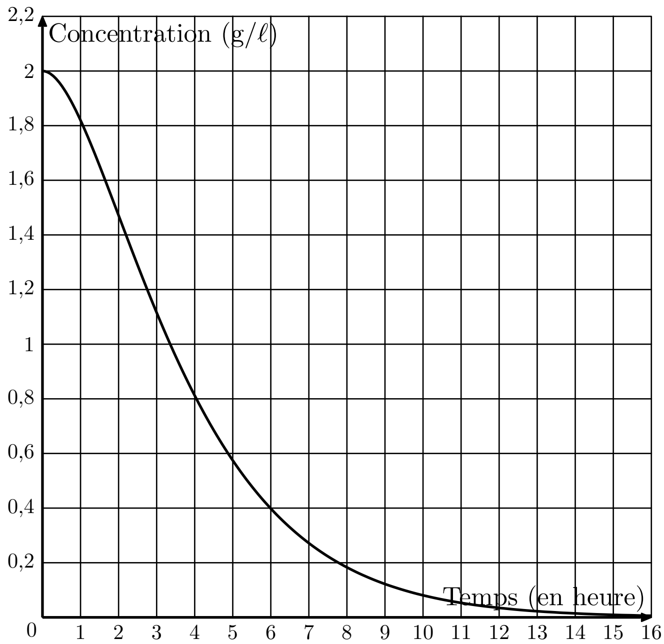
 

## 5. Point d'inflexion : graphiquement :

**Exercice 7050**

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :

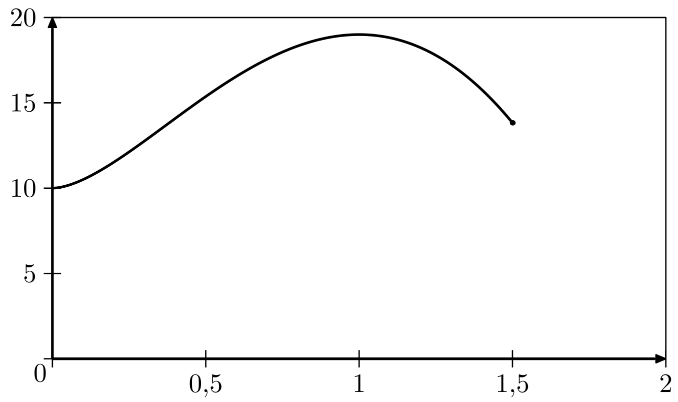



En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

## 6. Point d'inflexion : étude de fonctions :

**Exercice 7020**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;15]$ par :
$f(x)=9\cdot x^2\cdot(1-2\cdot\ln x)+10$.
La courbe représentative de $f$ est donnée ci-dessous :




On admet que $f''(x)=-36\cdot\ln x-36$ où $f''$ désigne la dérivée seconde de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0\,;1{,}5]$.

Montrer que la courbe représentative de la fonction $f$ admet un point d'inflexion dont l'abscisse est $e^{-1}$.

**Exercice 7791**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :
$f(x)=\big(-2\cdot x+30\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x)=\big(-0{,}4\cdot x+4\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ pour tout réel $x$ de l'intervalle $[-20\,;20]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[-20\,;20]$.
   On précisera la valeur exacte du maximum de $f$.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution $\alpha$.

   b. Donner une encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,2.

3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

| | |
|---|---|
| 1 | Dériver $\big(-10\cdot x+200\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x+3}$<br>$\big(-2\cdot x+30\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ |
| 2 | Dériver $\big(2\cdot x+30\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$<br>$\big(-0{,}4\cdot x+4\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ |
| 3 | Dériver $\big(-0{,}4\cdot x+4\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$<br>$\big(-0{,}08\cdot x+0{,}4\big)\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$ |

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction $f$ est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

**Exercice 7790**

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$ par :

$$f(x)=\frac{1}{0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}}$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.

1. Montrer que, pour tout réel $x$ dans l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, on a :

$$f'(x)=\frac{100\cdot\mathrm{e}^{-x}}{\left(0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$$

On note $f''$ la fonction dérivée seconde de $f$ sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.
Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de $f''(x)$ :

$$f''(x)=\frac{100\cdot\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(100\cdot\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\right)}{\left(0{,}5+100\cdot\mathrm{e}^{-x}\right)^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle $\left[0\,;10\right]$, l'inéquation $100\cdot\mathrm{e}^{-x}-0{,}5\geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation :
   $x\leqslant -\ln\left(0{,}005\right)$.

   b. En déduire le tableau de signes de la fonction $f''$ sur l'intervalle $\left[0\,;10\right]$.

3. On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ tracée dans un repère.
   Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion noté $I$, dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction $f$ est concave.