

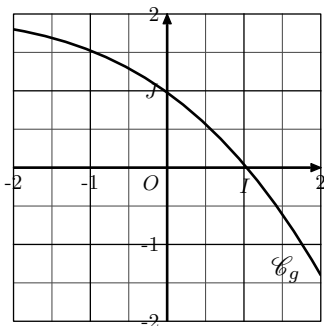
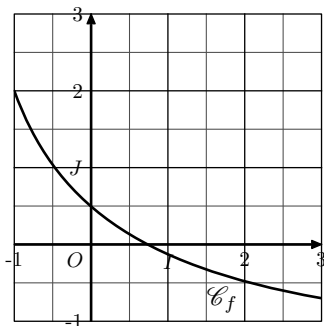
# Terminale ES/Convexité

## 1. Introduction :

### Exercice 7788



On considère les deux fonctions  $f$  et  $g$  décroissantes représentées ci-dessous :



Laquelle de ces deux courbes décroît "de moins en moins"?

### Exercice 7795



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par l'expression :

$$f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{0,5 \cdot x + 1}$$

Etudier le signe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ .

### Exercice 7797



On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x \cdot e^{x^2 - 3}$$

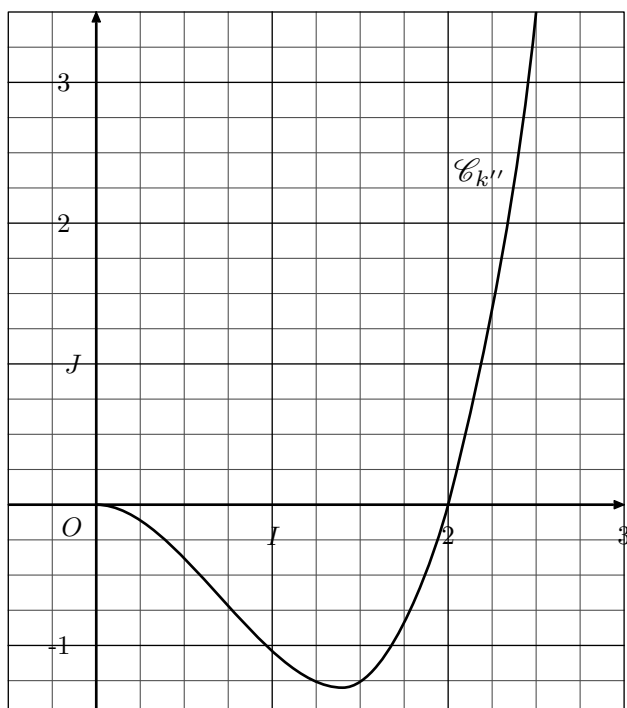
Déterminer le signe sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f''$ , dérivée seconde de la fonction  $f$ .

## 2. Convexité: graphiquement :

### Exercice 7011



On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la dérivée seconde  $k''$  d'une fonction  $k$  définie sur  $[0; +\infty[$ .



Parmi les réponses proposées, laquelle est correcte?

1.  $k$  est concave sur l'intervalle  $[1; 2]$ .
2.  $k$  est convexe sur l'intervalle  $[0; 2]$ .
3.  $k$  est convexe sur  $[0; +\infty[$ .
4.  $k$  est concave sur  $[0; +\infty[$ .

### Exercice 7054

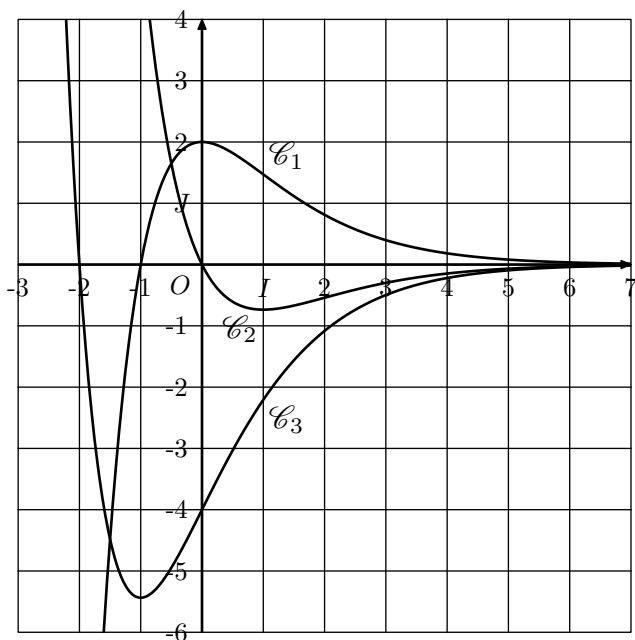


Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  définies sur  $[-3; 7]$  ont été représentées.

L'une de ces fonctions représente une fonction  $f$ , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction  $f$ .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.



### 3. Convexité: étude de fonctions :

#### Exercice 7730

Parmi les propositions suivantes, laquelle est exacte.  
La fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 9 \cdot x$  est convexe sur l'intervalle :

- a.  $]-\infty; +\infty[$
- b.  $[0; +\infty[$
- c.  $]-\infty; 0]$
- d.  $[-3; 3]$

#### Exercice 7793

On considère la fonction  $f$  définie, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-2; 4]$  par :  $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+1}$   
On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$ .

1. Montrer que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[-2; 4]$ , on a :  $f'(x) = -(x+1) \cdot e^{-x+1}$
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $[-(x+1) \cdot \exp(-x+1)]$ ) $x \cdot \exp(-x+1)$
2	intégrer $[(x+2) \cdot \exp(-x+1)]$ $-(x+3) \cdot \exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre à la question suivante :

### 4. Convexité et positions des tangentes :

#### Exercice 7794

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; 10]$  par :  $f(x) = -x \cdot \ln(x) + 2 \cdot x + 1$

Déterminer un intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe. Justifier.

#### Exercice 7026

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 8]$  par :  $f(x) = \frac{0,4}{20 \cdot e^{-x} + 1} + 0,4$

1. Montrer que  $f'(x) = \frac{8 \cdot e^{-x}}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^2}$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de la fonction  $f$ .
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f'(x) := 8 \cdot e^{-x} / (20 \cdot e^{-x} + 1)^2$ $f'(x) := \frac{8 \cdot e^{-x}}{400 \cdot (e^{-x})^2 + 40 \cdot e^{-x} + 1}$
2	$g(x) := \text{Dérivée}[f'(x)]$ $g(x) := \frac{160 \cdot (e^{-x})^2 - 8 \cdot e^{-x}}{8000 \cdot (e^{-x})^3 + 1200 \cdot (e^{-x})^2 + 60 \cdot e^{-x} + 1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $8 \cdot e^{-x} \cdot \frac{20 \cdot e^{-x} - 1}{(20 \cdot e^{-x} + 1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe.

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans le plan muni d'un repère.

Montrer que la courbe  $\mathcal{C}$  est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes sur l'intervalle  $]0; 10]$ .

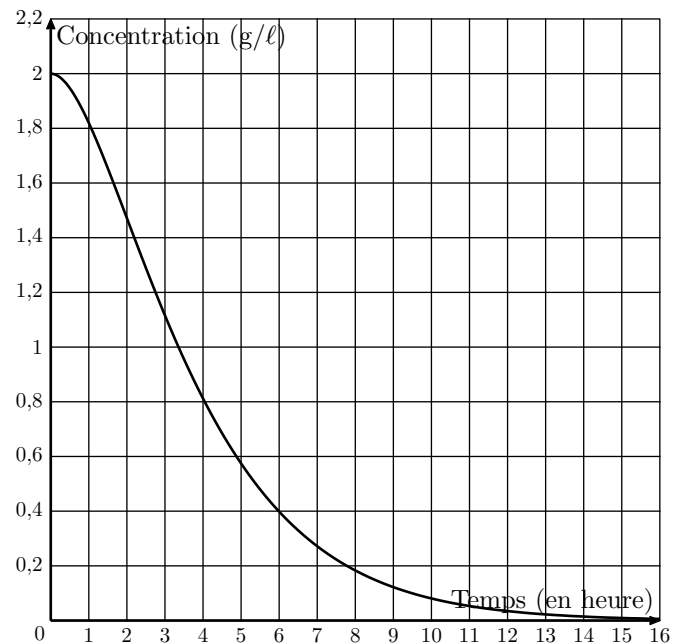
## 5. Point d'inflexion: graphiquement :

### Exercice 7050



On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes en litres, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie ci-dessous :



En vous aidant d'une lecture graphique et sans justifier, au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle?

## 6. Point d'inflexion: étude de fonctions :

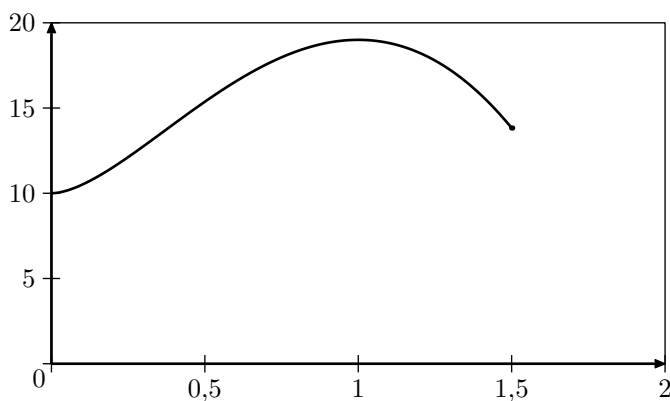
### Exercice 7020



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; 15]$  par :

$$f(x) = 9 \cdot x^2 \cdot (1 - 2 \cdot \ln x) + 10.$$

La courbe représentative de  $f$  est donnée ci-dessous :



On admet que  $f''(x) = -36 \cdot \ln x - 36$  où  $f''$  désigne la dérivée seconde de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; 1,5]$ .

Montrer que la courbe représentative de la fonction  $f$  admet un point d'inflexion dont l'abscisse est  $e^{-1}$ .

### Exercice 7791



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[-20; 20]$  par :

$$f(x) = (-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$$

1. a. Montrer que  $f'(x) = (-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$  pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-20; 20]$ .  
b. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[-20; 20]$ .  
On précisera la valeur exacte du maximum de  $f$ .
2. a. Montrer que, sur l'intervalle  $[-20; 20]$ , l'équation  $f(x) = -2$  admet une unique solution  $\alpha$ .  
b. Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,2.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10 \cdot x + 200) \cdot e^{0,2 \cdot x + 3}$ $(-2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
2	Dériver $(2 \cdot x + 30) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$
3	Dériver $(-0,4 \cdot x + 4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$ $(-0,08 \cdot x + 0,4) \cdot e^{0,2 \cdot x - 3}$

Répondre à la question suivante en utilisant les résultats donnés par le logiciel :

Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction  $f$  est convexe et préciser l'abscisse du point d'inflexion.

### Exercice 7790



On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 10]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{0,5 + 100 \cdot e^{-x}}$$

On note  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

1. Montrer que, pour tout réel  $x$  dans l'intervalle  $[0; 10]$ , on a :

$$f'(x) = \frac{100 \cdot e^{-x}}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^2}$$

On note  $f''$  la fonction dérivée seconde de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .

Un logiciel de calcul formel fournit l'expression suivante de  $f''(x)$  :

$$f''(x) = \frac{100 \cdot e^{-x} \cdot (100 \cdot e^{-x} - 0,5)}{(0,5 + 100 \cdot e^{-x})^3}$$

2. a. Montrer que, dans l'intervalle  $[0; 10]$ , l'inéquation  $100 \cdot e^{-x} - 0,5 \geq 0$  est équivalente à l'inéquation :  
 $x \leq -\ln(0,005)$ .
- b. En déduire le tableau de signes de la fonction  $f''$  sur l'intervalle  $[0; 10]$ .
3. On appelle  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  tracée dans un repère.  
Montrer, à l'aide de la question 2., que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion noté  $I$ , dont on précisera la valeur exacte de l'abscisse.
4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer l'intervalle sur lequel la fonction  $f$  est concave.