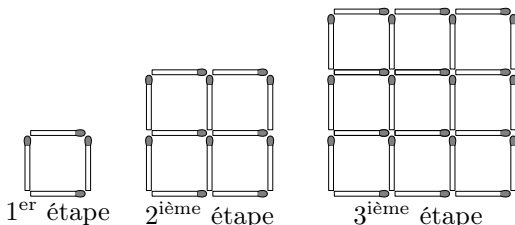


Terminale ES spé/Introduction aux matrices

1. Rappes sur les suites :

Exercice 6144

On considère les constructions suivantes :



On note (u_n) la suite numérique définie sur \mathbb{N}^* où u_n représente le nombre d'allumettes nécessaire à la construction de la $n^{\text{ième}}$ étape.

Parmi les définitions proposées ci-dessous, laquelle permet de définir la suite (u_n) présentée ci-dessus :

- a. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4 \cdot u_n \end{cases}$
- b. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \cdot n \end{cases}$
- c. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \cdot (n + 1) \end{cases}$
- d. $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = 4 \cdot u_n + n \end{cases}$

Exercice 6125

On considère les suites numériques, ci-dessous, définies sur \mathbb{N}

par récurrence : c'est à dire en fonction de leur valeur initiale et d'une relation avec les termes précédents.

1. $u_0 = 5$; $u_{n+1} = u_n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $v_0 = 3$; $v_{n+1} = 2 \cdot v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $w_0 = 2$; $w_{n+1} = -w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. $x_0 = 4$; $x_{n+1} = 2 \cdot x_n - 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
5. $x_0 = 1$; $x_1 = 1$; $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Déterminer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Exercice 6127

1. On considère la suite (u_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

$$u_n = 3 \cdot n + 2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Justifier que la suite (u_n) est une suite arithmétique. Donner la raison de cette suite.

2. On considère la suite (v_n) définie explicitement par la relation en fonction du rang n :

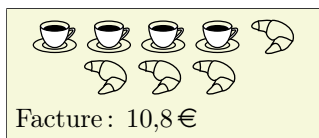
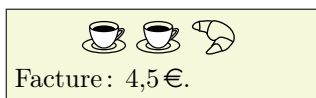
$$v_n = 2 \times 3^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner la raison de cette suite.

2. Rappels sur les systèmes :

Exercice 6118

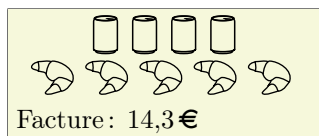
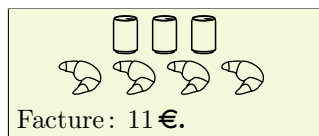
Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'un café?

Exercice 6119

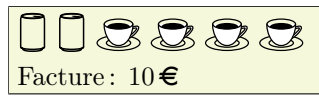
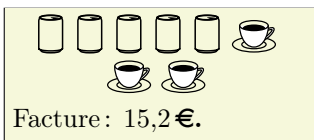
Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Dans ce café, quels sont les prix d'un croissant et d'une canette?

Exercice 6120

Dans un café, voici deux commandes et le montant de leur facture :



Quels sont les prix, dans ce café, d'un café et d'une canette?

Exercice 6121

- Résoudre par la méthode de combinaisons linéaires le

3. Introduction aux matrices :

Exercice 6123

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

Il note l'ensemble de ces valeurs dans la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 3,50 & 2,80 & 1,75 \\ 3,25 & 3 & 1,70 \end{pmatrix}$$

Les différents nombres placés dans la matrice s'appellent "les coefficients de la matrice". On note, de manière générale, m_{ij} les coefficients de la matrice où i et j sont deux entiers permettant de situer la place du coefficient dans la matrice.

Plus précisément, le coefficient m_{ij} est le prix du "Produit j " chez le "Fournisseur i ".

- Donner les valeurs des coefficients suivant : m_{12} ; m_{22} ; m_{13}
 - Compléter la phrase suivante :
"Le coefficient m_{ij} se situe dans la matrice à l'intersection de la ligne ... et de la colonne ..."
- Ecrire la nouvelle matrice N exprimant le prix des mêmes produits en francs de l'Afrique de l'Ouest. On utilisera la conversion $1\text{€} = 655\text{FCFA}$ et on arrondira les valeurs à l'unité près.

Exercice 6143

Trois tri-athlètes participent à une course. Les temps de parcours de chacune des épreuves sont données dans le tableau ci-dessous exprimées en minutes :

	Jacques 1 ^{er} athlète	Henry 2 ^e athlète	3 ^e Paul athlète
Course à pied (épreuve 1)	45	62	34
Natation (épreuve 2)	35	24	28
Cyclisme (épreuve 3)	92	95	104

système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

- Résoudre par la méthode de la substitution le système suivant :

$$(T) : \begin{cases} 3x + y = 16 \\ 8x - 5y = 12 \end{cases}$$

On souhaite représenter les données de ce tableau à double entrée par une matrice $A = (a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} est le temps de parcours, exprimé en minutes, de l'athlète i lors de l'épreuve j .

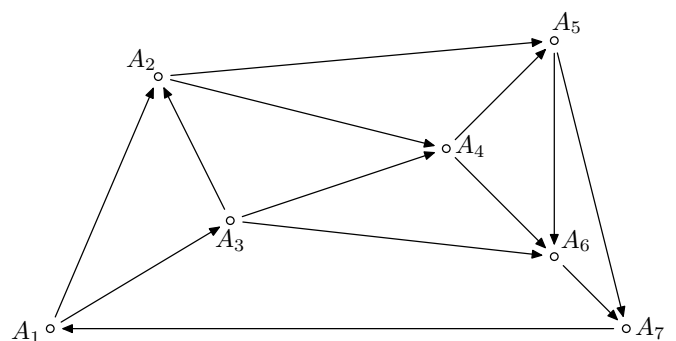
- Donner les valeurs des coefficients suivants : a_{13} ; a_{32}
- Ecrire la matrice A .
- On considère la matrice $B = (b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} est la durée, exprimé en heure et arrondi au centième près, du temps de parcours effectué par le participant i lors de l'épreuve j .
 - Ecrire la matrice B
 - Quel mécanisme simple permet de passer de la matrice A à la matrice B ?

Exercice 6170

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterrissage, sont appelées *taxiways*.

Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation (les "taxiways") et les sommets du graphe sont les intersections.

Ce graphe est orienté pour indiquer le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies :



Ecrire la matrice $M = (m_{ij})$ associée à ce graphe où le coefficient m_{ij} représente le nombre de chemin pour aller de l'intersection A_i à l'intersection A_j .

On admet que pour toute valeur de i : $m_{ii} = 0$.

4. Première manipulation de matrices :

Exercice 6141



On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Pour mettre en évidence les coefficients de la matrice, on note : $A = (a_{ij})$

1. Donner la valeur des coefficients de la matrice suivants :
 - a. a_{23} b. a_{34} c. a_{11} d. a_{31}
2. Déterminer la valeur des calculs suivants :
 - a. $a_{11} + a_{21}$ b. $a_{32} \times a_{14}$ c. $(a_{24})^2$

3. Citer l'ensemble des couples de coefficients de la matrice opposés entre eux.

Exercice 6142



On appelle “matrice magique” toute matrice où les sommes des coefficients par ligne, par colonne, par la diagonale principale et par la seconde diagonale donnent toutes le même résultat.

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont des matrices magiques :

a. $\begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

5. Multiplication par un réel et addition :

Exercice 6154



Effectuer les opérations suivantes :

a. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b. $4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 6155



Effectuer les opérations suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

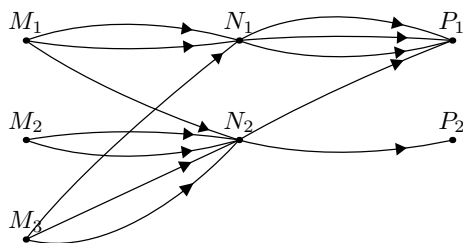
b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

6. Multiplication de matrices :

Exercice 6156



Ci-dessous sont représentés des liaisons routières entre des villes :



1. a. On considère la matrice $A=(a_{ij})$ où le coefficient a_{ij} représente “le nombre de route reliant la ville M_i avec la ville N_j ”.
Ecrire la matrice A .
- b. On considère la matrice $B=(b_{ij})$ où le coefficient b_{ij} représente “le nombre de route reliant la ville N_i avec la ville P_j ”.
Ecrire la matrice B .
- c. On considère la matrice $C=(c_{ij})$ de dimension 3×2 où le coefficient c_{ij} est définie par :
 $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j}$

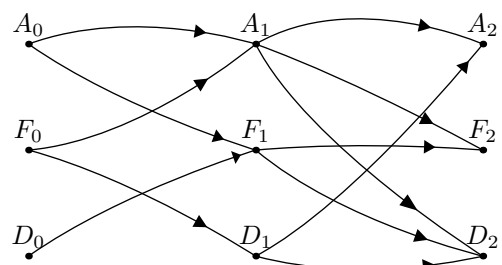
Ecrire la matrice C .

2. a. Combien de trajets permettent de passer de la ville M_1 à P_1 ? de la ville M_1 à P_2 ? de la ville M_2 à la ville P_1 ?
- b. Que remarque-t-on? Comment peut-on interpréter les coefficient de la matrice C .

Exercice 6164



Trois amies Abondance, Fortune et Désirée (on les considèrera dans cet ordre tout au long de l'exercice) s'échangent chaque semaine leur shampoing colorant. Ci-dessous, dans le graphe est représenté les différents échanges possibles sur deux semaines



1. On note M la matrice représentant les échanges au cours de la première semaine. Plus précisément, le coefficient

m_{ij} représente le nombre de possibilité d'échanges au cours de la première semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

2. On note N la matrice représentant les échanges au cours de la seconde semaine. Plus précisément, le coefficient n_{ij} représente le nombre d'échange au cours de la seconde semaine entre la $i^{\text{ième}}$ amies et la $j^{\text{ième}}$ amies.

3. a. Effectuer le produit matriciel $M \cdot N$.

b. A l'aide du graphe, déterminer le nombre de possibilités d'échanges pour que le shampoing d'Abondance se retrouve en fin de deuxième semaine entre les mains de Désirée.

Exercice 6165

Vérifier les égalités suivantes :

a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

c.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 6157

Effectuer les produits de matrices suivantes :

a.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Quelques propriétés de la multiplication :

Exercice 6166

1. Effectuer les produits matriciels suivants :

a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Que peut-t-on donner comme caractéristique à une matrice ne comportant que des 1 sur sa diagonale principale et des zéros ailleurs ?

Exercice 6167

1. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Effectuer les deux produits matriciels suivants :

a.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Peut-on obtenir une règle sur les produits $A \cdot B$ et $B \cdot A$ de deux matrices ?

8. Inverse de matrices :

Exercice 6173

On souhaite résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + 2z = 7 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

1. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b. Que peut-on dire des solutions de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2. a. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

b. En utilisant la question précédente, simplifier l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

c. Donner le triplet $(x; y; z)$ solution du système (S) d'équations.

9. Résolution de systèmes sans calculatrice :

Exercice 6183

1. Effectuer le produit matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On considère le système ci-dessous de trois équations à trois inconnues :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 2z = -1 \\ -2x + 3z = -1 \end{cases}$$

- a. Déterminer l'expression des deux matrices A et B telles que l'équation matricielle ci-dessous ait les mêmes solutions que le système (\mathcal{S}) :

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$$

- b. Résoudre l'équation matricielle précédente.

10. Résolution de systèmes avec calculatrice :

Exercice 6185

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'inverse de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre le système suivant :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} -x + y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 3z = -4 \\ 3x - y - z = -5 \end{cases}$$

11. Etude et résolution de contraintes :

Exercice 6207

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 10 \quad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombre s réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

Justifier que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (\mathcal{S}) .

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

Exercice 6215

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 10 \quad \text{où } \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des} \\ \text{nombre s réels.} \end{cases}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet $(a; b; c)$ est solution du système (\mathcal{S}) .

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ 27a + 9b + 3c = 17,4 \\ 125a + 25b + 5c = 73 \end{cases}$$

On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

1. a. Ecrire ce système sous la forme $M \cdot X = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet $(a; b; c)$ solution du système (\mathcal{S}) .

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau pro-

duites?

Exercice 6216

On considère la fonction f définie par le polynôme du troisième degré :

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 2 \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R}$$

La fonction f admet les images suivantes :

$$f(-1) = -8 \quad ; \quad f(1) = 8 \quad ; \quad f(2) = 28$$

1. Ecrire un système (\mathcal{S}) de trois équations et de trois inconnues dont le triplet $(a; b; c)$ est solution.

255. Exercices non-classés :

Exercice 6712

Une entreprise recense le prix en euros des produits qu'elle utilise en lien avec ses différents fournisseurs. Il obtient le tableau à double entrée suivant :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	3,50	2,80	1,75
Fournisseur 2	3,25	3	1,70

On note $A = (a_{ij})$ la matrice où les coefficients a_{ij} représentent le prix du "Produit j " chez le "Fournisseur i ".

2. On note X la matrice colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

- a. Exprimer deux matrices A et Y tel que l'équation (\mathcal{E}) matrice ci-dessous admet le même triplet solution du système (\mathcal{S}) d'équations :
 $(\mathcal{E}) : A \cdot X = Y$.
- b. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée du triplet solution de (\mathcal{S}) au centième près.

1. Ecrire la matrice A .
2. Les fournisseurs décident des augmentations sur leur produit dont les montants sont données dans le tableau ci-dessous :

	Produit 1	Produit 2	Produit 3
Fournisseur 1	0,50	0,20	0,25
Fournisseur 2	0,25	0	0,3

Ecrire la matrice B correspondant aux augmentations.

3. Ecrire la matrice C correspond aux nouveaux prix.