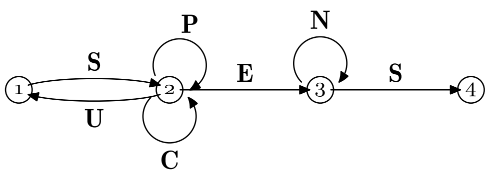
Compiler exercice — Compiler correction — Plus d'option

Terminale ES spé/Graphe étiqueté, pondéré, probabiliste

1. Graphe étiqueté :

Exercice 6390

Pour accéder à sa messagerie, Antoine a choisi un code qui doit être reconnu par le graphe étiqueté suivant, de sommets 1, 2, 3 et 4 :



Une succession des lettres constitue un code possible si ces lettres se succèdent sur un chemin du graphe orienté ci-dessus, ne partant du sommet 1 et en sortant au sommet 4. Les codes SES et $SPPCES$ sont ainsi des codes possibles, contrairement aux codes SUN et $SPEN$.

1. Parmi les trois codes suivants, écrire sur votre copie le *(ou les)* code*(s)* reconnu*(s)* par le graphe.

$$SUCCES \quad ; \quad SCENES \quad ; \quad SUSPENS$$

2. Recopier et compléter la matrice d'adjacence A associé au graphe. On prendra les sommets dans l'ordre $1-2-3-4$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

3. Avec une calculatrice, on a calculé :

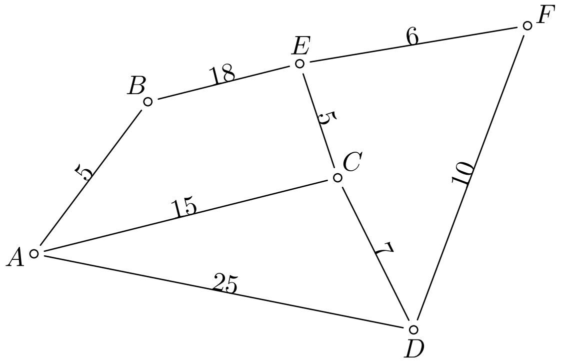
$$A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 8 & 3 \\ 12 & 29 & 20 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de codes de 4 lettres reconnus par le graphe. Quels sont ces codes?

2. Algorithme de Dijkstra :

Exercice 6367

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous où sont indiqués sur chacune des arêtes le temps de parcours, en minutes, pour relier deux sommets de ce graphe.

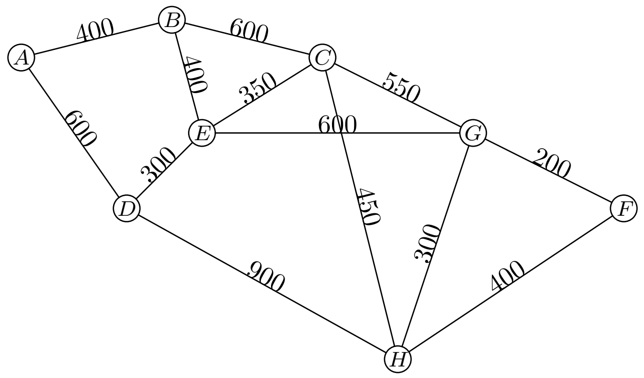


Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet A au sommet F en un temps minimal.

Exercice 6372

Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes *(une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête)* :

Des contraintes d'organisation obligent cet homme polique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ indique les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.

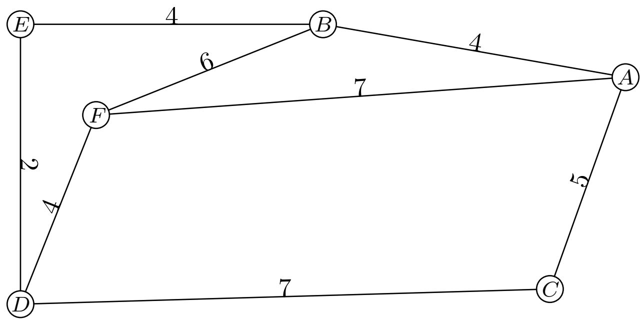


Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.

Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

Exercice 6370

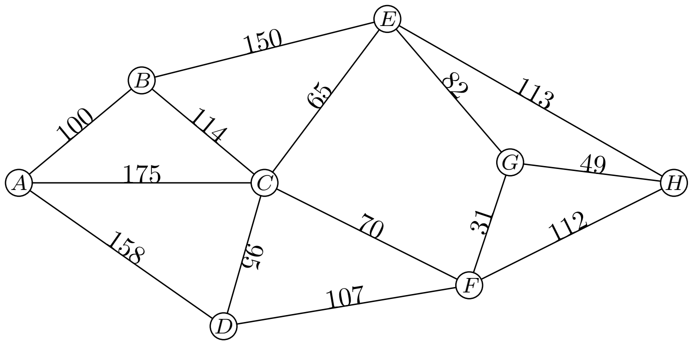
On considère le graphe ci-dessous où sont indiquées les durées de parcours pour chacune d'elles.



Déterminer la chaîne la plus courte reliant les sommets A et D.

Exercice 6378

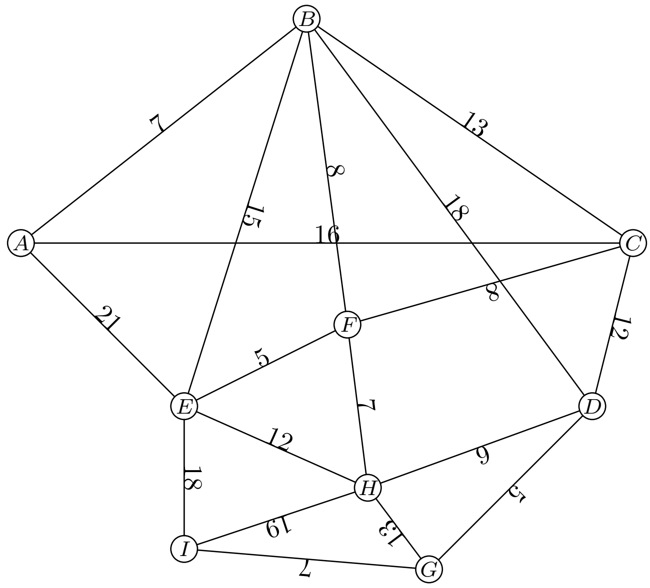
Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notée B, C, D, E, F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effetuer. Justifier la réponse.

Exercice 6379

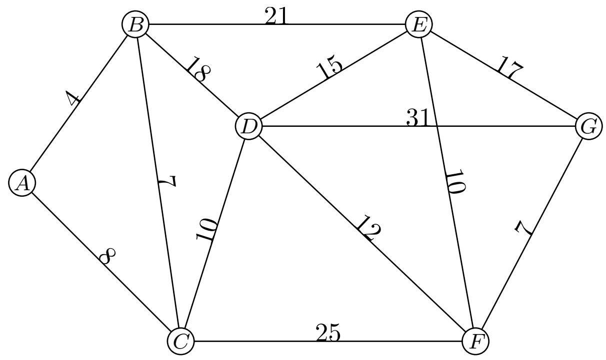
Une partie d'un domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.

Exercice 6385

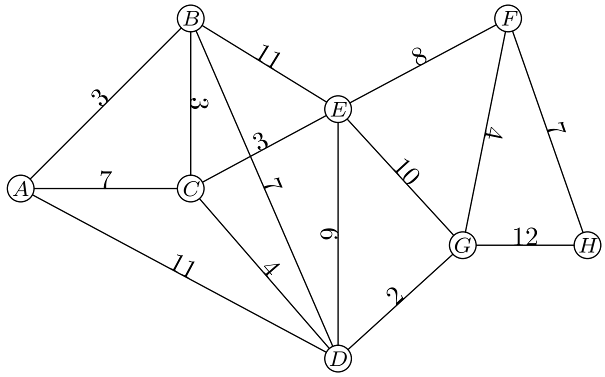
Une région est munie d'un réseau de trains, représenté par le graphe Γ ci-dessous.
Les stations sont symbolisées par les sommets A, B, C, D, E, F et G. Chaque arête représente une ligne reliant deux gares. Les temps de parcours *(correspondance comprise)* en minutes entre chaque sommet ont été rajoutés sur le graphe.



1. Déterminer le plus court chemin en minutes, reliant la gare B à la gare G.
2. Quelle est la longueur en minutes de ce chemin?

Exercice 6389

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des "*déchet papier*" ainsi que le temps de trajet *(en minutes)* entre ces différents points, sont représentés par le graphe ci-dessous. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différentes points de collecte.



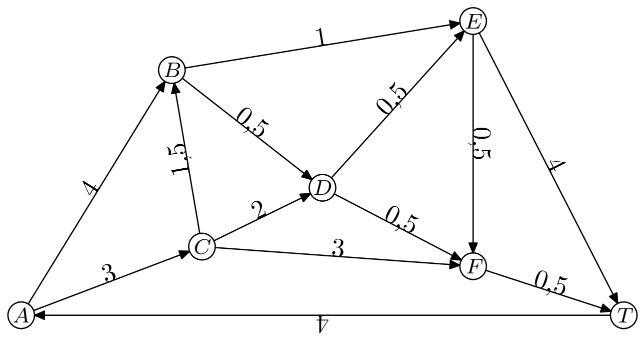
Le conduteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.

3. Algorithme de Dijkstra présentant des égalités de chemins :

Exercice 6374

Le graphe ci-dessous représente, dans un aéroport donné, toutes les voies empruntées par les avions au roulage. Ces voies, sur lesquelles circulent les avions avant ou après atterissage, sont appelées *taxiways*.
Les arêtes du graphe représentent les voies de circulation *(les "taxiways")* et les sommets du graphe sont les intersections.

Dans le graphe ci-dessous, on a indiqué le sens de circulation pour les avions dans les différentes voies ainsi que le temps de parcours pour chacune en minute(s).



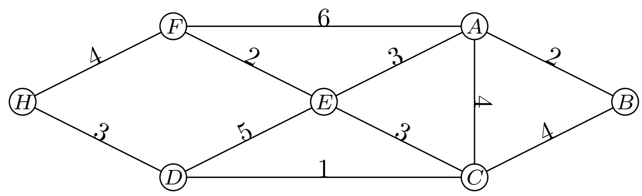
1. a. Ecrire la matrice M associé à ce graphe *(ranger les sommets dans l'ordre alphabétique)*

   b. Citer tous les chemins de longueur 3 reliant A à T.

2. L'avion qui a atteri en bout de piste en A et doit se rendre le plus rapidement possible au terminal situé au point T.
   Déterminer l'itinéraire le plus rapide et en donner la durée.

Exercice 6368

On considère le graphe ci-dessous :



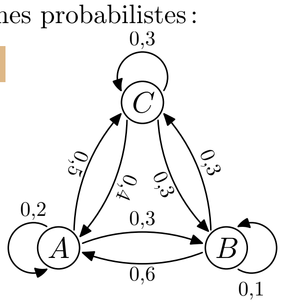
Quel est le chemin le plus court pour relier le sommet B au sommet H?

4. Graphe probabiliste - matrice de transition :

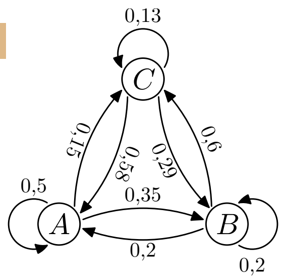
Exercice 6393

Donner les matrices de transition associées à chacun de ces graphes probabilistes :

a.

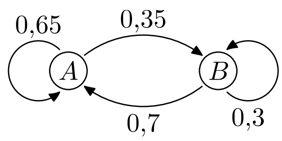


b.



Exercice 6395

Donner la matrice de transition du graphe probabiliste ci-dessous :



5. Graphe probabiliste - recherche des états :

Exercice 5950

On définit les deux suites (u_n) et (v_n) par les relations :

$$u_0=0 \quad ; \quad v_0=1 \quad ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n+2v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1. Déterminer la valeur des termes u_3 et v_3.

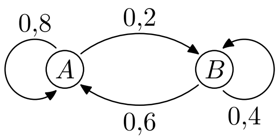
2. On considère la matrice M définie par :
$$M=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
A l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot M^3$

Exercice 6391

On considère deux gazs A et B qui en contact se transforme l'un en l'autre. Au départ, le mélange est composé de $20\,\ell$ de gaz A et $50\,\ell$ de gaz B.

Une étude montre que chaque heure :
- $20\,\%$ du gaz A se tranforme en gaz B ;
- $60\,\%$ du gaz B se transforme en gaz A.

On schématise ce phénomène par le graphe pondéré suivant :



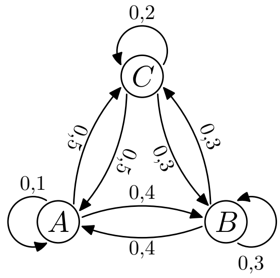
1. Déterminer la composition du mélange au bout de $3\,h$.

2. A l'aide de la calculatrice, effectuer le calcul :
$$\begin{pmatrix} 20 & 50 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}^3$$

Exercice 6392

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :

On note a_n, b_n, c_n les probabilités associé'es à chacun des états à l'étape n.



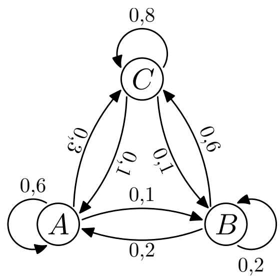
Les valeurs initiales sont : $a_0=5 \quad ; \quad b_0=2 \quad ; \quad c_0=7$

1. Donner la matrice de transition associée à ce graphe probabiliste.

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs associées à chacun de ses états à l'état 5. On arrondira les résultats au millième près.

Exercice 6394

Le graphes ci-dessous représente une marche aléatoire entre trois états A, B et C :
On considère la matrice-colonne $U_0=\begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}$ représentant la valeur des probabilités d'être situé sur chacun des sommets à l'étape 0.



A l'aide de calculatrice et en observant les différents termes U_1, U_2, U_3,. . . ,U_{20}, quelle conjecture peut-on effectuer?

6. Etude d'un graphe probabiliste :

Exercice 3578

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dan les entreprises d'une grande ville.

En 2013, l'entreprise U avait $45\,\%$ du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve $90\,\%$ de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V.
Quant à l'entreprise V, elle conserve $85\,\%$ de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit une client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

- u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0=0,45$;
- v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.

2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1.

3. On considère la fonction `f` *(incomplète)*, extrait d'un algorithme, donnée ci-dessous. Appelée avec pour argument un entier naturel n non-nul, celle-ci renvoye le couple de valeurs $(u_n\,;v_n)$.
Compléter les lignes $(\ell.3)$ et $(\ell.6)$ de la fonction pour obtenir le résultat attendu.

```
ℓ.1   Fonction f(N)
ℓ.2       U ← 0,45
ℓ.3       V ← ...
ℓ.4       Pour i allant de 1 jusqu'à N
ℓ.5           U ← 0,9×U+0,15×V
ℓ.6           V ← ...
ℓ.7       Fin Pour
ℓ.8       Renvoyer (U;V)
```

4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n :
$u_{n+1} = 0,75\cdot u_n + 0,15$.
On note, pour tout entier naturel n : $\quad w_n=u_n-0,6$
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.
   b. Quelle est la limite de la suite (w_n)? En déduire la limite de la suite (u_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Exercice 6400

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : "*la commande est passée auprès du fournisseur A*" ;
- H désigne l'état : "*La commande est passée aurpès du fournisseur H*".

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n la probabilité de l'évènement : "*La semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A*" ;
- h_n la probabilité de l'évènement : "*La semaine n, l'eentreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H*" ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3. Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspondant à l'état stable du système. En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et on rappele que :
$P_k = P_0 \times M^k$ pour k entier naturel.
Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.