

Proposition :

Dans le plan, on considère deux droites (d) et (d') admettant respectivement les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' pour vecteurs normaux.

- Les droites (d) et (d') sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.
- Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires si, et seulement si, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.

Preuve :

Notons \vec{u} et \vec{u}' des vecteurs directeurs respectivement des droites (d) et (d') .

$(\vec{u}; \vec{n})$ et $(\vec{u}'; \vec{n}')$ sont deux couples de vecteurs orthogonaux entre eux.

- \Rightarrow Supposons que les droites (d) et (d') sont parallèles. Les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires: le vecteur \vec{u} est aussi un vecteur directeur de la droite (d') .

Les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux au même vecteur \vec{u} : on en déduit que les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.

- \Rightarrow Supposons les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires. Le vecteur \vec{u} étant orthogonal au vecteur \vec{n} et les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' étant colinéaires, on en déduit que le vecteur \vec{u} est orthogonal au vecteur \vec{n}' : le vecteur \vec{u} est aussi un vecteur directeur de la droite (d') .

Les droites (d) et (d') admettant le même vecteur \vec{u} pour vecteur directeur.

On en déduit que les droites (d) et (d') sont parallèles entre elles.

- \Rightarrow Supposons les droites (d) et (d') perpendiculaires entre elles. On en déduit que les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux entre eux.

Les vecteurs \vec{n}' et \vec{u}' sont orthogonaux entre eux et les vecteurs \vec{u}' et \vec{u} sont orthogonaux entre eux.

On en déduit que les vecteurs \vec{n}' et \vec{u} sont colinéaires entre eux.

Le vecteur \vec{n} est orthogonal au vecteur \vec{u} et les vecteurs \vec{n}' et \vec{u} sont orthogonaux entre eux: on en déduit que le vecteur \vec{n} est orthogonal au vecteur \vec{n}' .

- \Rightarrow Supposons que les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux entre eux. Les vecteurs \vec{u} et \vec{n} étant orthogonaux entre eux, on en déduit que les vecteurs \vec{u} et \vec{n}' sont orthogonaux entre eux.

Les vecteurs \vec{u}' et \vec{n}' sont orthogonaux entre eux et les vecteurs \vec{u} et \vec{n}' sont colinéaires entre eux. On en déduit que les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux entre eux.

Les droites (d) et (d') sont perpendiculaires entre elles.