Produit scalaire

A. Définition:

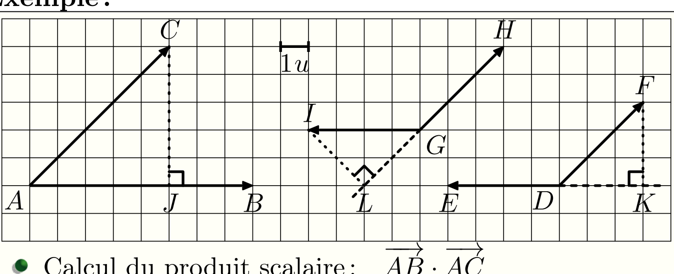
Définition :

Dans le plan, on considère trois point A, B, C *(on suppose B distinct de A)*. On note H le projeté du point C sur la droite (AB). On définit le **produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$** comme le nombre défini par :

- $AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens
- $-AB\times AH$ si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens opposés.

On note ce nombre $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Exemple :



- Calcul du produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

  Notons J le projeté du point C sur la droite (AB). Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires et de même sens. On a :

  $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AH = 8\times 5 = 40$

- Calcul du produit scalaire : $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF}$

  Notons K le projeté du point F sur la droite (DE). Les vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires et de même sens. On a :

  $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DF} = -DE\times DK = -4\times 3 = -12$

- Calcul du produit scalaire : $\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GI}$

  Notons L le projeté du point I sur la droite (GU). Les vecteurs $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires et de même sens. On a :

  $$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{GI} = -GH\times GL = -\big(3\sqrt{2}\big)\times\big(2\sqrt{2}\big)$$
  $$= -6\times\big(\sqrt{2}\big) = -12$$

Proposition : *(propriété immédiate)*

Dans le plan, on considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non-nuls.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires :
  - et de même sens alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
  - et de sens contraire alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux alors : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 0$

Preuve :

r484-0

B. Expression par le cosinus:

Proposition :

Pour tout points A, B, C du plan, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ admet pour expression :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$$

Preuve :

r486-0

Corollaire :

Soit A, B, C trois points distincts deux à deux. On a :

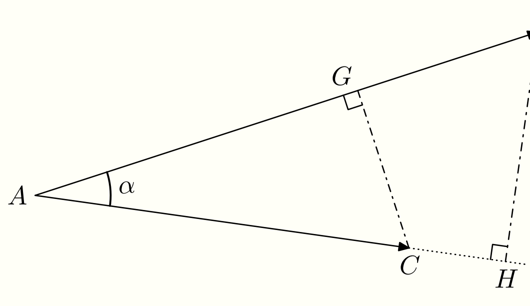
$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$$

C. Propriété:

1. Symétrie :

Remarque :

Considérons les trois points A, B, C représentés ci-dessous :



Notons H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC) et G le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Par définition du produit scalaire, on a :

- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AG$
- $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = AC\times AH$

La proposition suivante montrera que ces deux valeurs sont égales.

Proposition :

Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$

Preuve :

r481-0

Exemple :

Exercice

2. Bilinéarité :

Lemme :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non-nuls du plan. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ admet une et une unique décomposition :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$

où $\overrightarrow{v_1}$ est un vecteur colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_2}$ est un vecteur orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}$.

Proposition : *(distributivité du produit scalaire sur la somme)*

Considérons trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$, on a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\big(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\big) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$$

Preuve :

r482-0

Proposition : *(associativité par la multiplication par un scalaire)*

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan et λ un nombre réel :

$$\big(\lambda\cdot\overrightarrow{u}\big)\cdot\overrightarrow{v} = \lambda\times\big(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}\big)$$

Preuve :

r482-1

3. Positivité :

Proposition :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur dans le plan. On a :
$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

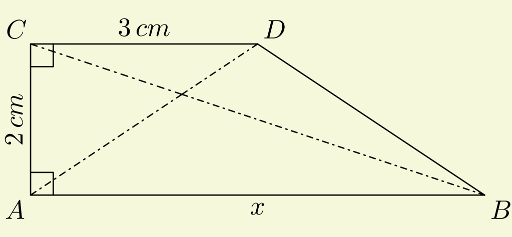
Remarque :

- la preuve se trouve ici : r490-0
- Pour simplification de l'écriture des opérations sur le produit scalaire, on note : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$

4. Application :

Exercice

On considère le trapèze $ABCD$ représenté ci-dessous :



où : $AC=2\,cm$; $CD=3\,cm$

Déterminer la longueur x du segment $[AB]$ afin que les diagonales, $[AD]$ et $[BC]$, du trapèze $ABCD$ soient perpendiculaires.

correction : https://chingatome.fr/8214

D. Propriété algébrique:

Proposition :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les quatre vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ quelconques :

- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\big(\overrightarrow{w}+\overrightarrow{t}\big) = \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{t} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{t}$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big)^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
- $\big(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\big)\cdot\big(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\big) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

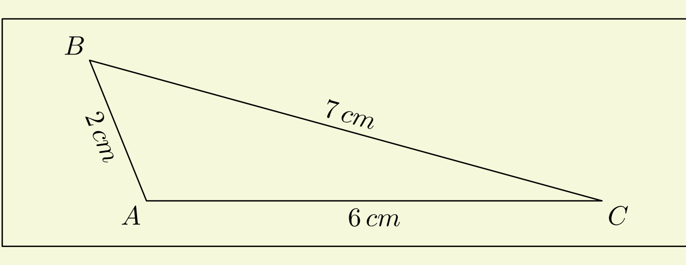
Preuve :

rq703-0

Exercice

On considère le triangle ABC tels que :

$AB = 3\,cm$; $AC = 4\,cm$; $BC = 6\,cm$



1. A l'aide de la formule :
   $\|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   Déterminer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
2. a. Placer le point D tel que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

   b. A l'aide de la formule :
   $\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\times\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$
   Déterminer la mesure de la diagonale $[AD]$ arrondie au millimètre près.

correction : https://chingatome.fr/5059

Corollaire :

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\cdot\Big[\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2\Big]$$

Remarque :

Cette dernière expression du produit scalaire ne fait intervenir que des distances dans le plan sans l'utilisation du projeté d'un point.

E. Formule d'Al-Kashi:

Al kashi = loi des cosinus = th pythagore généralisé

Propriété :

Dans un triangle ABC, on a les relations suivantes :

- $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\widehat{ABC}$
- $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\times AC\times AB\times\cos\widehat{BAC}$

Preuve :

rq706-0

Remarque :

Ces relations métriques portent également le nom :

- loi des cosinus
- ou théorème de Pythagore généralisé

Leur démonstration est rapide lorsqu'on a le produit scalaire et ses propriétés algébriques. Historiquement, ces formules ont été prouvées à partir de relations sur les aires.

Exercice

On considère le triangle ABC dont les mesures sont :

$AB = 5{,}5\,cm$; $AC = 6{,}2\,cm$; $BC = 4{,}7\,cm$

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au dixième de degrès près.

correction : https://chingatome.fr/7850

Exercice

On considère un triangle ABC vérifiant les mesures :

$AB = 5\,cm \quad ; \quad AC = 3\,cm \quad ; \quad \widehat{ABC} = 30^o$

Déterminer les mesures possible du segment BC réalisant ces conditions.

correction : https://chingatome.fr/8529

F. Expression analytique :

Proposition :

On considère le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$ et deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$. On a :

$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = x\times x' + y\times y'$

Preuve :

r493-0

Exercice

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les trois points :

$A(-2\,;3) \quad ; \quad B(4\,;-1)$

et un point C tel que :

- le point C ait pour abscisse 3.
- le triangle ABC est rectangle en B.

Déterminer les coordonnées du point C.

correction : https://chingatome.fr/8432

Corollaire :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, considérons deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x\,;y)$ et $\overrightarrow{v}(x'\,;y')$ non-nuls. Notons α l'angle formé entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On a :

$$\cos\left(\overrightarrow{u}\,;\overrightarrow{v}\right) = \frac{x\times x' + y\times y'}{\sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Preuve :

r164-0

Exercice

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$.

Déterminer une mesure de l'angle orienté $\widehat{EDF}$ où $D(3\,;5)$, $E(-1\,;0)$, $F(2\,;4)$ au centième de degré près.

correction : https://chingatome.fr/2593