Polynôme du second degré

A. Rappels:

Définition :

On appelle **polynôme du second degré**, toute expression algébrique admettant pour forme :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$$

où a, b et c sont des nombres réels avec $a\neq0$.

Remarque :

Quelques rappels d'algèbres de $2nd$: r674-1

Remarque : *(Utilité de la forme factorisée)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x - 6$

On a $f(x)=2{\cdot}(x-3)(x+1)$ et on en déduit :

- Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul. Les racines du polynômes sont :
  $x-3=0$ ou $x+1=0 \implies \mathcal{S}=\{-1\,;3\}$
-

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

B. Forme canonique:

Proposition : *(et définition)*

Pour toute fonction $f:x\mapsto a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ $(a\neq0)$ du second degré, il existe deux nombres réels α et β tels que la fonction f admette pour expression :

$$f(x) = a{\cdot}(x-\alpha)^2 + \beta$$

Cette expression s'appelle **forme canonique du polynôme** $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$

Remarque : *(Utilité de la forme canonique)*

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2{\cdot}x^2 - 4{\cdot}x - 6$

On a $f(x)=2{\cdot}(x-1)^2-8$ et on en déduit :

- Un carré est toujours positif :
  $(x-1)^2\geqslant0 \implies 2{\cdot}(x-1)^2-8\geqslant-8$
  Le nombre -9 est un minorant de f sur $\mathbb{R}$.
  Puisque $f(1)=-8$, le nombre -8 est le minimum de f.
- Soit $a, b\in\left]-\infty\ 1\right]$ tels que $a<b$:

$a < b \leqslant 1$	$2{\cdot}(a-1)^2 > 2{\cdot}(b-1)^2$
$a-1 < b-1 \leqslant 0$	$2{\cdot}(a-1)^2-8 > 2{\cdot}(b-1)^2-8$
$(a-1)^2 > (b-1)^2 \geqslant 0 \quad (*)$	$f(a) > f(b)$

  f est décroissante sur $\left]-\infty\ 1\right]$ car deux nombres de cet intervalle et leurs images sont comparés dans le sens contraire.

  $^{(*)}$la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

Preuve :

Sachant que le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ est un polynôme du second degré, on a $a\neq0$. Lors de cette preuve, on utilisera le résultat suivant :

$$\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x + \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

$$\implies \qquad x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x = \left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left(x^2 + \frac{b}{a}{\cdot}x\right) + c$$

En utilisant la propriété précédente :

$$\begin{aligned}
&= a{\cdot}\left[\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2}{4{\cdot}a^2}\right] + c\\
&= a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - a{\cdot}\frac{b^2}{4{\cdot}a^2} + c\\
&= a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4{\cdot}a} - c\right)\\
&= a{\cdot}\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)\\
&= a{\cdot}\left[x-\left(-\frac{b}{2{\cdot}a}\right)\right]^2 + \left(-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}\right)\\
&= a{\cdot}(x-\alpha)^2 + \beta
\end{aligned}$$

La forme obtenue est la forme souhaitée avec pour valeur :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad ; \quad \beta = -\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

La forme canonique est parfois utilisée sous la forme :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left[\left(x+\frac{b}{2{\cdot}a}\right)^2 - \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}\right]$$

Corollaire :

Tout polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c = a{\cdot}\left(x+\frac{a}{2{\cdot}b}\right)^2 - \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Remarque :

- Considérons le polynôme x^2+x+1. Pour déterminer la forme canonique de ce polynôme, on remarque que les deux termes x^2+x s'obtiennent par développement de l'identité remarquable $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ dont la forme développée est $x^2+x+\frac{1}{4}$.
  Faisons apparaître cette expression développé dans notre polynôme :
  $$x^2+x+1 = x^2+x+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+1$$
  $$= \left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}+1\right) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$
  Nous venons de déterminer la forme canonique du polynôme x^2+x+1 avec : $\alpha=-\frac{1}{2}$; $\beta = \frac{3}{4}$
- Voici d'autres mises en forme canonique :
  - $2x^2+4x-1 = 2{\cdot}(x+1)^2-3$
  - $-x^2-3x-2 = -\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

C. Equations du second degré:

Proposition :

On considère un polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré *($a\neq0$)*. L'ensemble des racines d'un polynôme dépend du signe de son discriminant :

- Si $\Delta<0$, le polynôme n'admet **aucune** racine.
  On note : $\mathcal{S}=\varnothing$
- Si $\Delta=0$, le polynôme admet **une** racine.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Si $\Delta>0$, le polynôme admet **deux** racines.
  Plus précisément : $\mathcal{S}=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\,;\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

Preuve :

Le polynôme $a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c$ du second degré, avec $a\neq0$, admet pour forme canonique :

$$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}$$

Notons Δ le discriminant du polynôme : $\Delta = b^2-4{\cdot}a{\cdot}c$

Notons x une racine de ce polynôme :

$a{\cdot}x^2+b{\cdot}x+c=0$	On obtient :
$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a}=0$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}$
On a $a\neq0$:	Avec la notation adoptée :
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4{\cdot}a{\cdot}c}{4{\cdot}a^2}=0$	$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2} \quad (*)$

- Lorsque $\boldsymbol{\Delta<0}$:
  On remarque que le membre de gauche, étant un carré, est positif ou nul alors que le membre de droite est du même signe que Δ : donc strictement négatif. Les deux membres n'étant pas de même signe, cette équation n'admet aucune solution.
  $\mathcal{S}=\varnothing$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta=0}$:
  On obtient $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$: cette équation admet une unique racine $-\frac{b}{2a}$. On a : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{b}{2{\cdot}a}\right\}$
- Lorsque $\boldsymbol{\Delta>0}$: reprenons l'expression $(*)$:
  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2}$$
  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4{\cdot}a^2} = 0$$
  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2{\cdot}a)^2} = 0$$
  $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)^2 = 0$$
  $$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right) = 0$$
  $$\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right) = 0$$
  Un produit étant nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul :
  $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0$ | $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=0$
  On obtient les 2 racines du polygône :
  $$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}$$
  On a : $\mathcal{S}=\left\{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\ ;\ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}\right\}$

