

Proposition :

Pour tout réel x , on a :

$$\bullet \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \bullet \exp(x) > 0$$

Preuve :

On considère la fonction g dont l'image d'un nombre x est donnée par la formule :

$$g(x) = \exp(x) \cdot \exp(-x)$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de deux fonctions dérivable. La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée g' :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp'(x) \cdot \exp(-x) + \exp(x) \cdot [-\exp'(-x)] \\ &= \exp'(x) \cdot \exp(-x) - \exp(x) \cdot \exp'(-x) \end{aligned}$$

De la propriété $\exp' = \exp$, on déduit :

$$= \exp(x) \cdot \exp(-x) - \exp(x) \cdot \exp(-x) = 0$$

La fonction g est donc constante. En remarquant que :

$$g(0) = \exp(0) \cdot \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = 1$$

On vient de montrer que :

- le produit $\exp(x) \cdot \exp(-x)$ ne s'annule jamais sur \mathbb{R} : le facteur $\exp(x)$ ne s'annule donc pas sur \mathbb{R} .

- Plus précisément, la fonction g est constante et égale à 1 :

$$g(x) = 1$$

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Proposition :

Pour tous nombres réels x et y , on a :

$$\bullet \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\bullet \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$\bullet \text{ Pour tout entier relatif } n : \exp(n \cdot x) = [\exp(x)]^n$$

Preuve :

- Soit a un réel quelconque. Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$f(x) = \exp(x+a) \cdot \exp(-x)$ La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \exp'(x+a) \cdot \exp(-x) + \exp(x+a) \cdot [-\exp'(-x)]$$

$$= \exp(x+a) \cdot \exp(-x) - \exp(x+a) \cdot \exp(-x) = 0$$

On en déduit que la fonction f est une fonction constante. De plus, on a :

$$f(0) = \exp(0+a) \cdot \exp(-0) = \exp(a) \cdot 1 = \exp(a)$$

Ainsi, la fonction f vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \exp(a)$$

$$\exp(x+a) \cdot \exp(-x) = \exp(a)$$

$$\exp(x+a) \cdot \frac{1}{\exp(x)} = \exp(a)$$

$$\exp(x+a) \cdot = \exp(a) \cdot \exp(x)$$

- On a la relation suivante :

$$\exp(x-y) = \exp[x + (-y)] = \exp(x) \cdot \exp(-y)$$

$$= \exp(x) \cdot \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

- La vraie démonstration se fait par un raisonnement par récurrence. Mais voici une idée de la preuve :

Nous allons utiliser plusieurs fois la propriété pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow \exp(x)^2 = \exp(x) \cdot \exp(x) = \exp(x+x) = \exp(2 \cdot x)$$

$$\Rightarrow \exp(x)^3 = [\exp(x)]^2 \cdot \exp(x) = \exp(2 \cdot x) \cdot \exp(x)$$

$$= \exp(2 \cdot x + x) = \exp(3 \cdot x)$$

$$\Rightarrow \exp(x)^4 = [\exp(x)]^3 \cdot \exp(x) = \exp(3 \cdot x) \cdot \exp(x)$$

$$= \exp(3 \cdot x + x) = \exp(4 \cdot x)$$

$$\Rightarrow \dots$$