Proposition :

Dans le plan muni d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé, on considère l'équation cartésienne $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$ définissant l'ensemble $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}:\quad \big\{M(x\,;y)\;\big|\;a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0\big\}\quad \text{où } a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ (a\,;b)\notin(0\,;0)$$

est une droite admettant le vecteur $\overrightarrow{u}\,(-b\,;a)$ pour vecteur directeur.

Lemme :

Pour tout couple de points M et M' de l'ensemble $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}\,(a\,;b)$

Preuve : *(du lemme)*

Les points $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$ appartenant à l'ensemble $\mathcal{E}$, on a les relations :

- $a{\cdot}x+b{\cdot}y+c=0$
- $a'{\cdot}x+b'{\cdot}y+c'=0$

Par soustraction de ces deux égalités membre à membre, on a :

$$\begin{aligned}\big(a{\cdot}x+b{\cdot}y+c\big)-\big(a'{\cdot}x+b'{\cdot}y+c\big)&=0\\ a{\cdot}x+b{\cdot}y+c-a'{\cdot}x-b'{\cdot}y-c&=0\\ a{\cdot}x+b{\cdot}y-a'{\cdot}x-b'{\cdot}y&=0\\ a{\cdot}\big(x-x'\big)+b{\cdot}\big(y-y\big)&=0\\ \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{MM'}&=0\end{aligned}$$

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{v}$.

Lemme :

Pour tous nombres réels a et b, non tous nuls, les vecteurs $\overrightarrow{u}\,(a\,;b)$ et $\overrightarrow{v}\,(-b\,;a)$ sont orthogonaux.

Preuve : *(du lemme)*

On a le produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=a{\times}(-b)+b{\times}a=-a{\times}b+a{\times}b=0$$

Preuve :

Puisque les réels a et b ne peuvent être nuls simultanément, effectuons la disjonction de cas suivante :

- Si $a{\neq}0$. Considérons le point $A\Big(-\dfrac{c}{a}\,;0\Big)$ qui appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$ car :
  $$a{\cdot}x_A+b{\cdot}y_A+c=a{\cdot}\Big(-\frac{c}{a}\Big)+b{\times}0+c=-c+0+c=0$$
  D'après le premier lemme, pour tout point M de l'ensemble $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}\,(a\,;b)$. On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{v}\,(-b\,;a)$: l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ forme la droite de même direction que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ passant par le point A.
- Si $b{\neq}0$. On considère le point $B\Big(0\,;-\dfrac{c}{b}\Big)$. On montre de même que :
  - le point B appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$.
  - pour tout point M appartenant à $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u}\,(a\,;b)$.
  - le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{v}\,(-b\,;a)$.

  On en déduit que l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite passant par le point B et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\,(-b\,;a)$.

Proposition :

Soit (d) une droite passant par le point $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\,(a\,;b)$.

Alors tout point $M(x\,;y)$ de la droite (d) vérifie l'équation cartésienne :

$$\big(-b\big){\cdot}x+a{\cdot}y+\big(b{\cdot}x_A-a{\cdot}y_A\big)=0$$

