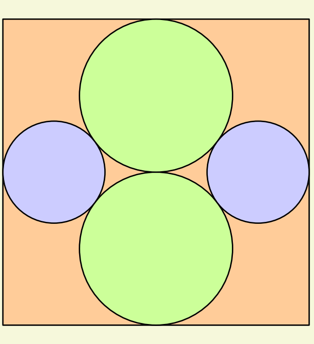
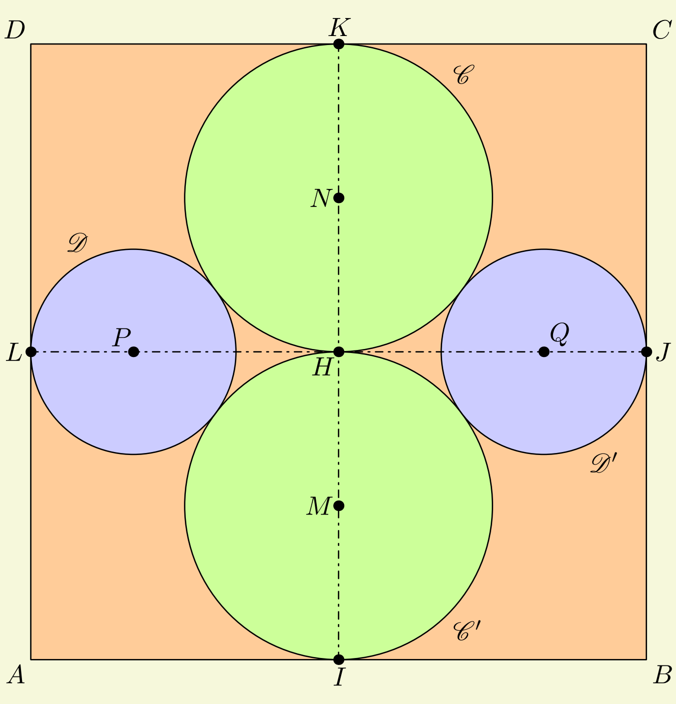
Sangaku - partie 3

On souhaite reconstruire la figure ci-contre où quatre cercles sont inscrits dans un cercle.

Deux de ses disques ont les même rayons et les deux autres aussi. Ces quatre cercles sont tangents entre eux *(ils ne s'interceptent qu'en un seul point)* mais également au carré qui les contient.



Voici la figure à reconstruire :

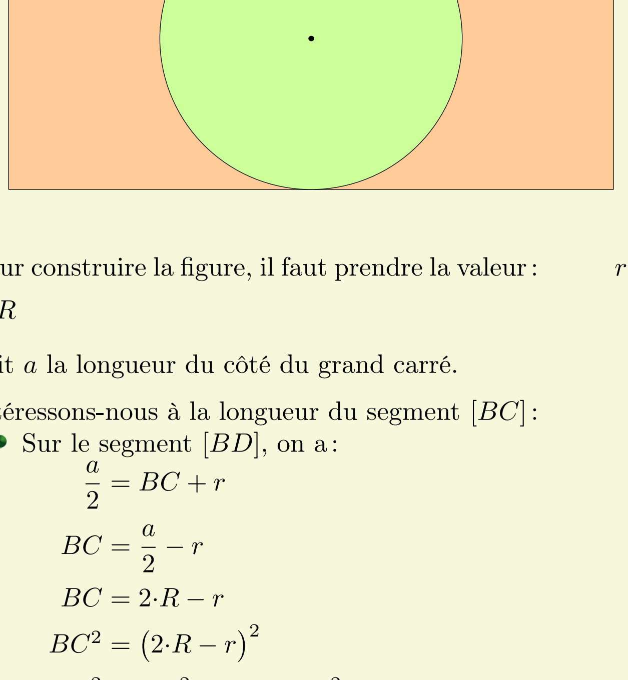


et quelques propriétés pour reconstruire cette figure :

- Le quadrilatère $ABCD$ est un carré.
- Les points I, J, K et L sont les milieux des côtés du carré.
- Le point M est le milieu du segment $[HI]$ et est le centre du cercle $\mathscr{C}'$.
- Le point N est le milieu du segment $[KH]$ et est le centre du cercle $\mathscr{C}$.
- Le point P est un point libre du segment $[LH]$. Le cercle $\mathscr{D}$ a pour centre le point P et passe par le point L.
- Le point Q est un point libre du segment $[LH]$. Le cercle $\mathscr{D}'$ a pour centre le point Q et passe par le point J.

Pour compléter correctement la figure, il faut déplacer correctement les points P et Q pour que ces quatre cercles soient tangents entre eux.

Sangaku - Partie 3 - Fiche professeur



Pour construire la figure, il faut prendre la valeur : $r = \frac{2}{3} \cdot R$

Soit a la longueur du côté du grand carré.

Intéressons-nous à la longueur du segment $[BC]$:

- Sur le segment $[BD]$, on a :
$$\frac{a}{2} = BC + r$$
$$BC = \frac{a}{2} - r$$
$$BC = 2 \cdot R - r$$
$$BC^2 = \left(2 \cdot R - r\right)^2$$
$$BC^2 = 4 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot r + r^2$$
- Dans le triangle rectangle ABC rectangle en B, on a l'égalité de Pythagore :
$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$\left(R + r\right)^2 = R^2 + BC^2$$
$$BC^2 = \left(R + r\right)^2 - R^2$$
$$BC^2 = \left(R^2 + 2 \cdot R \cdot r + r^2\right) - R^2$$
$$BC^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot r + r^2 - R^2$$
$$BC^2 = 2 \cdot R \cdot r + r^2$$

On en déduit l'égalité :
$$4 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot r + r^2 = 2 \cdot R \cdot r + r^2$$
$$4 \cdot R^2 - 4 \cdot R \cdot r = 2 \cdot R \cdot r$$
$$4 \cdot R^2 - 6 \cdot R \cdot r = 0$$
$$2 \cdot R \cdot \left(2 \cdot R - 3 \cdot r\right) = 0$$

Le rayon R étant non-nul, on en déduit :
$$2 \cdot R - 3 \cdot r = 0$$
$$-3 \cdot r = -2 \cdot R$$
$$r = \frac{-2}{-3} \cdot R$$
$$r = \frac{2}{3} \cdot R$$