

L'algorithme de Babylone

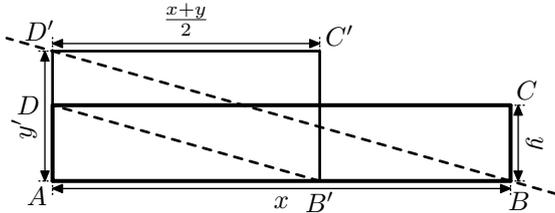
Partie A : Etude d'un pas de l'algorithme

On considère un rectangle $ABCD$ ayant pour dimensions x et y . On place le point B' du segment $[AB]$ tel que :

$$AB' = \frac{x+y}{2}$$

La droite parallèle à la droite $(B'D)$ passant par le point B intercepte la droite (AD) au point D' .

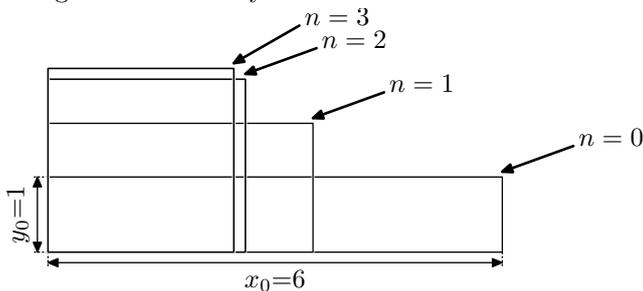
On place le point C' tel que $AB'C'D'$ soit un parallélogramme.



1. Justifier que les rectangles $ABCD$ et $AB'C'D'$ ont la même aire.
2. On note y' la distance AD' . Exprimer y' en fonction de x et de y .

Partie B : Etude de l'algorithme

On considère un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 1 cm . Voici représentée la figure obtenue après 3 itérations de l'algorithme de Babylone :



Cet algorithme permet d'obtenir la suite (x_n) des longueurs et la suite (y_n) des largeurs des rectangles obtenus.

1. A l'aide d'un logiciel tableur :
 - a. déterminer les valeurs approchées des vingt premiers termes des suites (x_n) et (y_n) .
 - b. Emettre une conjecture quant à la convergence des suites (x_n) et (y_n) .
2. On admet que les termes des suites (x_n) et (y_n) sont strictement positifs.
 - a. Etablir l'égalité : $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)}$
 - b. Montrer que la suite (x_n) est décroissante sur \mathbb{N} .
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (y_n) .
 - d. Etablir la convergence des suites (x_n) et (y_n) vers une même limite qu'on précisera.
 - e. Quelle est alors la forme du rectangle "limite".

L'algorithme de Babylone

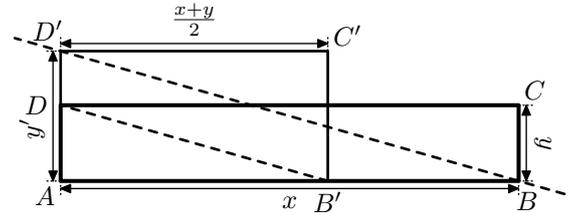
Partie A : Etude d'un pas de l'algorithme

On considère un rectangle $ABCD$ ayant pour dimensions x et y . On place le point B' du segment $[AB]$ tel que :

$$AB' = \frac{x+y}{2}$$

La droite parallèle à la droite $(B'D)$ passant par le point B intercepte la droite (AD) au point D' .

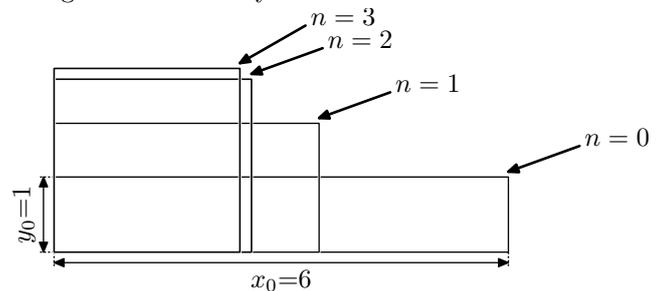
On place le point C' tel que $AB'C'D'$ soit un parallélogramme.



1. Justifier que les rectangles $ABCD$ et $AB'C'D'$ ont la même aire.
2. On note y' la distance AD' . Exprimer y' en fonction de x et de y .

Partie B : Etude de l'algorithme

On considère un rectangle de longueur 6 cm et de largeur 1 cm . Voici représentée la figure obtenue après 3 itérations de l'algorithme de Babylone :



Cet algorithme permet d'obtenir la suite (x_n) des longueurs et la suite (y_n) des largeurs des rectangles obtenus.

1. A l'aide d'un logiciel tableur :
 - a. déterminer les valeurs approchées des vingt premiers termes des suites (x_n) et (y_n) .
 - b. Emettre une conjecture quant à la convergence des suites (x_n) et (y_n) .
2. On admet que les termes des suites (x_n) et (y_n) sont strictement positifs.
 - a. Etablir l'égalité : $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)}$
 - b. Montrer que la suite (x_n) est décroissante sur \mathbb{N} .
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (y_n) .
 - d. Etablir la convergence des suites (x_n) et (y_n) vers une même limite qu'on précisera.
 - e. Quelle est alors la forme du rectangle "limite".