Proposition :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

- L'ensemble des barycentres de $\big(A\,;\,a\big)$ et $\Big(B\,;\,b\Big)$, avec $a+b\neq 0$, est **la** droite (AB).
- L'ensemble des barycentres de $\big(A\,;\,a\big)$ et $\Big(B\,;\,b\Big)$, avec $a+b\neq 0$ et a et b de même signe, est **le** segment $[AB]$.

Preuve :

- Si G est le barycentre du système $\Big\{\big(A\,;\,a\big)\,;\,\Big(B\,;\,b\Big)\Big\}$, on a la relation :

$$\begin{aligned} a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\big(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\big) &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\ (a+b)\cdot\overrightarrow{GA} &= -b\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{GA} &= -\frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}\\ -\overrightarrow{GA} &= \frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AG} &= \frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et ayant un point en commun, on en déduit que les points A, B, G sont alignés :

Le point G appartient à la droite (AB).

Si G est un point de la droite (AB), alors il existe un entier k vérifiant :

$\overrightarrow{AG}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

où : $|k|=\dfrac{AG}{AB}$ et le signe de k dépend du sens de $\overrightarrow{AG}$.

On vérifie facilement que le point G est le barycentre du système :

$\Big\{\Big(A\,;\,1-k\Big)\,;\,\Big(B\,;\,k\Big)\Big\}$

- Soit M un point du segment $[AB]$, d'après la propriété précédente, il existe un entier k tel que M soit le barycentre du système :

$\Big\{\Big(A\,;\,1-k\Big)\,;\,\Big(B\,;\,k\Big)\Big\}$

On a alors la relation :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{(1-k)+k}\cdot\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

Or, pour que le point M appartienne au segment $[AB]$, il est nécessaire que $k\in[0\,;\,1]$; on vérifie facilement que les coefficients des points A et B appartiennent aussi à l'intervalle $[0\,;\,1]$: ces deux pondérations sont de même signe.

Si M est le barycentre du système $\Big\{\big(A\,;\,a\big)\,;\,\Big(B\,;\,b\Big)\Big\}$ où a et b sont de même signe, alors par homogénéité du barycentre, on peut supposer que ces deux pondérations sont positives.

La position du point M étant caractérisée par la relation :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}$

Les nombres a et b étant positifs, le quotient $\dfrac{b}{a+b}$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$; on en déduit que le point M appartient au segment $[AB]$.

Proposition :

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

- L'ensemble des barycentres de $\big(A\,;\,a\big)$ et $\Big(B\,;\,b\Big)$, avec $a+b\neq 0$, est **la** droite (AB).
- L'ensemble des barycentres de $\big(A\,;\,a\big)$ et $\Big(B\,;\,b\Big)$, avec $a+b\neq 0$ et a et b de même signe, est **le** segment $[AB]$.

Preuve :

- Si G est le barycentre du système $\Big\{\big(A\,;\,a\big)\,;\,\Big(B\,;\,b\Big)\Big\}$, on a la relation :

$$\begin{aligned} a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\big(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\big) &= \overrightarrow{0}\\ a\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{GA}+b\cdot\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\ (a+b)\cdot\overrightarrow{GA} &= -b\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{GA} &= -\frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}\\ -\overrightarrow{GA} &= \frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AG} &= \frac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et ayant un point en commun, on en déduit que les points A, B, G sont alignés :

Le point G appartient à la droite (AB).

Si G est un point de la droite (AB), alors il existe un entier k vérifiant :

$\overrightarrow{AG}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

où : $|k|=\dfrac{AG}{AB}$ et le signe de k dépend du sens de $\overrightarrow{AG}$.

On vérifie facilement que le point G est le barycentre du système :

$\Big\{\Big(A\,;\,1-k\Big)\,;\,\Big(B\,;\,k\Big)\Big\}$

- Soit M un point du segment $[AB]$, d'après la propriété précédente, il existe un entier k tel que M soit le barycentre du système :

$\Big\{\Big(A\,;\,1-k\Big)\,;\,\Big(B\,;\,k\Big)\Big\}$

On a alors la relation :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{(1-k)+k}\cdot\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{AB}$

Or, pour que le point M appartienne au segment $[AB]$, il est nécessaire que $k\in[0\,;\,1]$; on vérifie facilement que les coefficients des points A et B appartiennent aussi à l'intervalle $[0\,;\,1]$: ces deux pondérations sont de même signe.

Si M est le barycentre du système $\Big\{\big(A\,;\,a\big)\,;\,\Big(B\,;\,b\Big)\Big\}$ où a et b sont de même signe, alors par homogénéité du barycentre, on peut supposer que ces deux pondérations sont positives.

La position du point M étant caractérisée par la relation :

$\overrightarrow{AM}=\dfrac{b}{a+b}\cdot\overrightarrow{AB}$

Les nombres a et b étant positifs, le quotient $\dfrac{b}{a+b}$ appartient à l'intervalle $[0\,;\,1]$; on en déduit que le point M appartient au segment $[AB]$.