Probabilité conditionnelle

A. Espace probabilisé:

Définition :

- On peut dire qu'une expérience est aléatoire lorsqu'on ne peut prédire la valeur de sortie.
- Chaque possibilité de sortie de l'expérience s'appelle un **événement élémentaire**.
- L'ensemble des évènements de l'expérience aléatoire s'appelle l'univers des issues ; on le note $\boldsymbol{\Omega}$.
- Toute partie de l'univers Ω s'appelle un **événement**.

Définition :

Soit Ω un univers possédant un nombre fini d'issues.
On appelle **loi de probabilité** sur Ω toute fonction $\mathcal{P}$ telle que : $\mathcal{P}$: parties de $\Omega \longmapsto [0\,;1]$

vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{P}(\varnothing)=0$
- $\mathcal{P}(\Omega)=1$
- $\displaystyle\sum_{w\in\Omega}\mathcal{P}(\{\omega\})=1$
- Soit A un événement : $\displaystyle\mathcal{P}(A)=\sum_{w\in A}\mathcal{P}(\{\omega\})=1$

Définition :

On dit qu'un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$ représente une situation d'**équiprobabilité** si tous les événements élémentaires ont les mêmes probabilités.

Propriété :

On a pour conséquences :

- $\mathcal{P}(w_1)=\mathcal{P}(w_2)=\cdots=\mathcal{P}(w_n)=\dfrac{1}{n}$
- A un événement de k évènements élémentaires :
  $\mathcal{P}(A)=\dfrac{k}{n}$

Propriété :

Soit $(\Omega\,;\mathcal{P})$ un espace probabilisé. Soit A et B deux événements de Ω, on a :

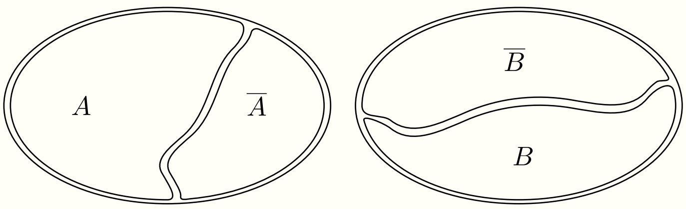
- Si $A\cap B=\varnothing$, alors $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)$

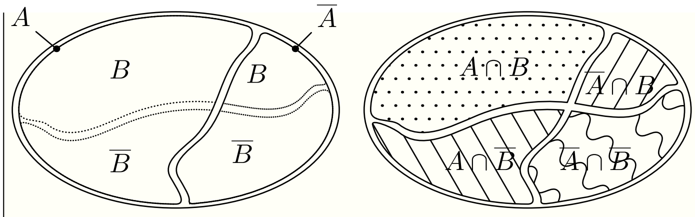
  Cette propriété se traduit par :
  Si A et B sont deux événement incompatible, la propbabilité de l'événement (A ou B) est la somme des probabilités de A et de B.
- Pour tout événement A, on a :
  $\mathcal{P}(\overline{A})=1-\mathcal{P}(A)$; $\mathcal{P}(A)=1-\mathcal{P}(\overline{A})$
- Quels que soient les événements A et B, on a :
  $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$

B. Probabilité conditionnelle:

Remarque :

Deux évènements A et B distincts permettent de considérer l'univers en 4 parties :





Ainsi, en choisissant un élément de A, on peut s'intéresser s'il appartient à B ou à $\overline{B}$.

Définition :

Soit A et B deux évènements tel que $\mathcal{P}(A)\neq 0$. On a appelle **probabilité de B sachant A** le nombre, noté $\mathcal{P}_A(B)$, définie par :

$$P_A(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

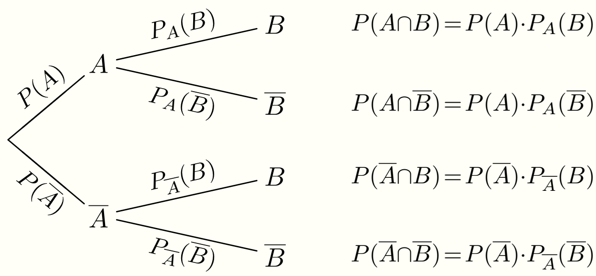
Proposition :

Si A et B sont deux évènements tels que $\mathcal{P}(A)\neq 0$ et $\mathcal{P}(B)\neq 0$ alors on a :

$$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}_A(B)=\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}_B(A)$$

Remarque :

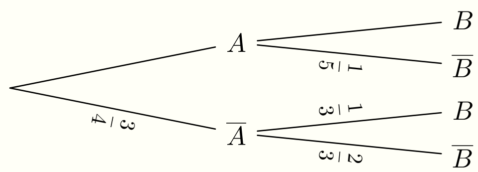
Deux évènements distincs A et B permet de contruire l'arbre de probabilité ci-dessous de l'expérience aléatoire :



Exemple :

Exercice

On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Alors $\mathcal{P}(A\cap B)$ la probabilité de l'évènement $A\cap B$ est égale à :

a. $\dfrac{21}{20}$ b. $\dfrac{1}{5}$ c. $\dfrac{20}{21}$ d. $\dfrac{1}{12}$

correction : https://chingatome.fr/2094

Définition :

Soit A un évènement. On dit que $\{B_1\,;B_2\,;\cdots;\,B_n\}$, ensemble d'évènements, forme une **partition** de A si :

- aucune de ces évènements est vide : $\forall i\in[\![1\,;n]\!], B_i\neq\varnothing$
- ils sont disjoints deux à deux :
  $(\forall i\in[\![1\,;n]\!])\ (\forall j\in[\![1\,;n]\!])\ (i\neq j\implies B_i\cap B_j=\varnothing)$
- leur union est égale à A : $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}B_i$

Proposition : *(Formule des probabilités totales)*

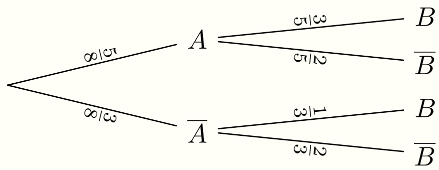
Soit A un évènement et $B_1,\ldots,B_n$ une partition de l'univers Ω.

$$\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(A\cap B_1)+\cdots+\mathcal{P}(A\cap B_n)=\sum_{k=1}^{n}\mathcal{P}(A\cap B_k)$$

Exemple :

Exercice

On considère une expérience aléatoire et deux de ses évènements A et B permettant d'obtenir l'arbre de probabilités ci-dessous :



Etablir que : $\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{2}$

correction : https://chingatome.fr/8558

C. Evènements indépendants :

Définition :

Soient A et B deux évènements. Les deux évenements A et B sont dits **indépendants** si :
$\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$

Proposition :

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.
A et B sont indépendants

$$\iff \mathcal{P}(B)=\mathcal{P}_A(B) \iff \mathcal{P}(A)=\mathcal{P}_B(A)$$

Preuve :

A est un évènement de probabilité non-nulle. Alors :

$$\mathcal{P}_A(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

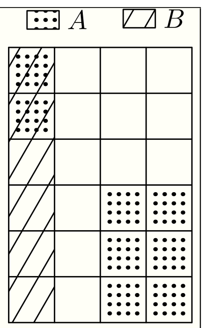
On a les équivalences :

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}_A(B)\iff\mathcal{P}(B)=\frac{\mathcal{P}(A\cap B)}{\mathcal{P}(A)}$$

$$\iff\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(A\cap B)$$

$$\Longrightarrow A \text{ et } B \text{ sont indépendants}$$

Exemple :



On a les probabilités :
$\mathcal{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{12}$; $\mathcal{P}(A)=\dfrac{1}{3}$; $\mathcal{P}(B)=\dfrac{1}{4}$

De l'égalité : $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$
On en déduit que les deux évènements A et B sont indépendants.

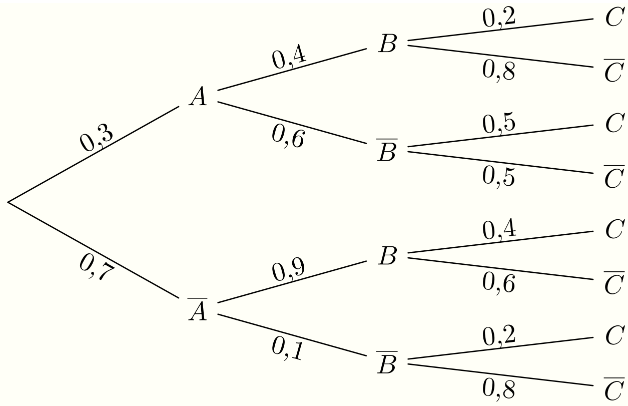
On vérifie que : $\mathcal{P}_B(A)=\mathcal{P}(A)$
car : $\mathcal{P}_B(A)=\dfrac{2}{6}$; $\mathcal{P}(A)=\dfrac{8}{24}$

Ainsi, la probabilité de l'évènement A est égale à la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

Exemple :

Exercice

On considère une expérience aléatoire et trois de ses évènements A, B et C donnant l'arbre de probabilités ci-dessous :



1. Déterminer la probabilité de l'évènement C.

2. Etablir que les évènements A et C sont indépendant?

correction : https://chingatome.fr/8325

Proposition :

Soient A et B deux évènements.
Si A et B sont deux évènements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Preuve :

Soient A et B deux évènements indépendants.

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(B\cap A)+\mathcal{P}(B\cap\overline{A})$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(B\cap A)$$

Les évènements A et B étant indépendants :

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(A)$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)\cdot[1-\mathcal{P}(A)]$$

$$\mathcal{P}(B\cap\overline{A})=\mathcal{P}(B)\times\mathcal{P}(\overline{A})$$

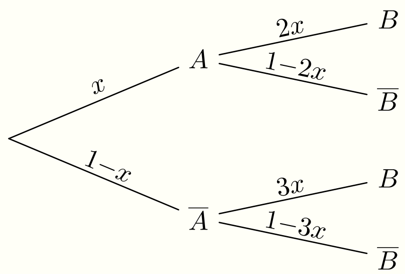
D. Quelques exemples :

1. Avec l'algèbre :

Exemple :

Exercice

Dans une expérience aléatoire, on considère deux évènements A et B permettant de construire l'arbre de probabilité ci-dessous



et tels qu'il existe un nombre réel x vérifiant :
$\mathcal{P}(A)=x$; $\mathcal{P}_A(B)=2x$; $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)=3x$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}(B)=\dfrac{29}{100}$.
Déterminer la valeur de x.

2. Dans cette question, on suppose que $\mathcal{P}_B(A)=\frac{1}{5}$.
Déterminer la valeur de x.

correction : https://chingatome.fr/6741

2. Avec les suites :

Exemple :

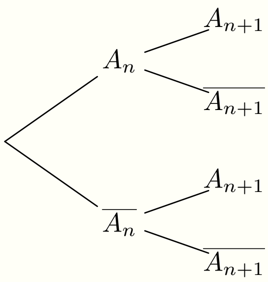
Exercice

Dans un espace probabilisé $(\Omega\,;\mathcal{P})$. On considère une suite d'évènements (A_n) vérifiant les relations suivantes :

$$\mathcal{P}(A_0)=0{,}4\ ;\ \begin{cases}\mathcal{P}_{A_n}(A_{n+1}) = 0{,}6\\ \mathcal{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0{,}4\end{cases}\quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

On note : $p_n=\mathcal{P}(A_n)$.

1. Compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



2. a. Etablir que :
$p_{n+1} = 0{,}2\cdot p_n + 0{,}4$

b. On définit la suite q_n par :
$q_n = p_n - 0{,}5 \quad \forall n\in\mathbb{N}$
Etablir que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison 0,2.

c. En déduire l'expression de la suite (p_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\mathcal{P}(A_n)$.

correction : https://chingatome.fr/6742