Définition :

Pour tout nombre réel positif ou nul a, on appelle **racine carré du nombre** a l'unique nombre positif dont le carré vaut a. Ce nombre se note $\sqrt{a}$

Remarque :

- Ainsi, pour a un nombre positif ou nul, on a :
  $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- La racine carré d'un nombre strictement négatif n'est pas définie : elle n'existe pas. La notation $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens en mathématique
- Du diagramme commutant représenté ci-contre pour a positif ou nul, on a les valeurs exactes suivantes :

$$\begin{tikzcd} \sqrt{a} \arrow[r, bend left, "\blacklozenge^2"] & a \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacklozenge}"] \end{tikzcd}$$

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

car : $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $1{,}2^2 = 1{,}44$

Lemme :

Si deux nombres ont le même carré alors ils sont soit égaux, soit opposés.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité :

$$a^2 = b^2$$
$$a^2 - b^2 = 0$$
$$(a+b)(a-b) = 0$$

Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nuls :

$a + b = 0$ | $a - b = 0$

$a = -b$ | $a = b$

Corollaire :

Si deux nombres positifs ont même carré alors ils sont égaux.

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls :

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

Preuve :

- Etudions le carré de ces deux nombres :
  - Par définition de la racine carré : $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$
  - Le carré de a est a^2.

  Les nombres $\sqrt{a^2}$ et a sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Etudions le carré de ces deux nombres :
  - Par définition de la racine carré :
    $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$
  - $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2$
    Par définition de la racine carré :
    $= a \times b$

  Les nombres $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Supposons $b \neq 0$. Etudions le carré de ces deux nombres :
  $$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b} \quad ; \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$$

  Les nombres $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux

Définition :

Pour tout nombre réel positif ou nul a, on appelle **racine carré du nombre** a l'unique nombre positif dont le carré vaut a. Ce nombre se note $\sqrt{a}$

Remarque :

- Ainsi, pour a un nombre positif ou nul, on a :
  $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$
- La racine carré d'un nombre strictement négatif n'est pas définie : elle n'existe pas. La notation $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens en mathématique
- Du diagramme commutant représenté ci-contre pour a positif ou nul, on a les valeurs exactes suivantes :

$$\begin{tikzcd} \sqrt{a} \arrow[r, bend left, "\blacklozenge^2"] & a \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacklozenge}"] \end{tikzcd}$$

$\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$

car : $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $1{,}2^2 = 1{,}44$

Lemme :

Si deux nombres ont le même carré alors ils sont soit égaux, soit opposés.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité :

$$a^2 = b^2$$
$$a^2 - b^2 = 0$$
$$(a+b)(a-b) = 0$$

Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nuls :

$a + b = 0$ | $a - b = 0$

$a = -b$ | $a = b$

Corollaire :

Si deux nombres positifs ont même carré alors ils sont égaux.

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls :

- $\sqrt{a^2} = a$
- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

Preuve :

- Etudions le carré de ces deux nombres :
  - Par définition de la racine carré : $\left(\sqrt{a^2}\right)^2 = a^2$
  - Le carré de a est a^2.

  Les nombres $\sqrt{a^2}$ et a sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Etudions le carré de ces deux nombres :
  - Par définition de la racine carré :
    $\left(\sqrt{a \times b}\right)^2 = a \times b$
  - $\left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) \times \left(\sqrt{a} \times \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 \times \left(\sqrt{b}\right)^2$
    Par définition de la racine carré :
    $= a \times b$

  Les nombres $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Supposons $b \neq 0$. Etudions le carré de ces deux nombres :
  $$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b} \quad ; \quad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$$

  Les nombres $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ et $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux

