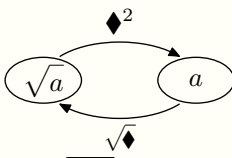


Définition :

Pour tout nombre réel positif ou nul a , on appelle **racine carré du nombre a** l'unique nombre positif dont le carré vaut a . Ce nombre se note \sqrt{a}

Remarque :

- Ainsi, pour a un nombre positif ou nul, on a :
 $(\sqrt{a})^2 = a$
 - La racine carré d'un nombre strictement négatif n'est pas définie : elle n'existe pas. La notation $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens en mathématique
 - Du diagramme commutant représenté ci-contre pour a positif ou nul, on a les valeurs exactes suivantes :

- $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{1,44}=1,2$
 car : $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $1,2^2 = 1,44$

Lemme :

Si deux nombres ont le même carré alors ils sont soit égaux, soit opposés.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité : $a^2 = b^2$ $a^2 - b^2 = 0$ $(a + b)(a - b) = 0$	Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul : $a + b = 0$ $a - b = 0$ $a = -b$ $a = b$
--	--

Corollaire :

Si deux nombres positifs ont même carré alors ils sont égaux.

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls :

- $\sqrt{a^2} = a$ • $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)

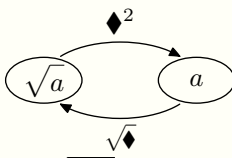
Preuve :

- Etudions le carré de ces deux nombres :
 ➔ Par définition de la racine carré : $(\sqrt{a^2})^2 = a^2$
 ➔ Le carré de a est a^2 .
 Les nombres $\sqrt{a^2}$ et a sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Etudions le carré de ces deux nombres :
 ➔ Par définition de la racine carré :
 $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$
 ➔ $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$
 Par définition de la racine carré :
 $= a \times b$
 Les nombres $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Supposons $b \neq 0$. Etudions le carré de ces deux nombres :
 $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$; $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$
 Les nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux

Définition :

Pour tout nombre réel positif ou nul a , on appelle **racine carré du nombre a** l'unique nombre positif dont le carré vaut a . Ce nombre se note \sqrt{a}

Remarque :

- Ainsi, pour a un nombre positif ou nul, on a :
 $(\sqrt{a})^2 = a$
 - La racine carré d'un nombre strictement négatif n'est pas définie : elle n'existe pas. La notation $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens en mathématique
 - Du diagramme commutant représenté ci-contre pour a positif ou nul, on a les valeurs exactes suivantes :

- $\sqrt{0}=0$; $\sqrt{1}=1$; $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{1,44}=1,2$
 car : $1^2 = 1$; $2^2 = 4$; $1,2^2 = 1,44$

Lemme :

Si deux nombres ont le même carré alors ils sont soit égaux, soit opposés.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels vérifiant l'égalité : $a^2 = b^2$ $a^2 - b^2 = 0$ $(a + b)(a - b) = 0$	Si un produit est nul alors au moins un de ses facteurs est nul : $a + b = 0$ $a - b = 0$ $a = -b$ $a = b$
--	--

Corollaire :

Si deux nombres positifs ont même carré alors ils sont égaux.

Propriété :

Soit a et b deux nombres réels positifs ou nuls :

- $\sqrt{a^2} = a$ • $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ • $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)

Preuve :

- Etudions le carré de ces deux nombres :
 ➔ Par définition de la racine carré : $(\sqrt{a^2})^2 = a^2$
 ➔ Le carré de a est a^2 .
 Les nombres $\sqrt{a^2}$ et a sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Etudions le carré de ces deux nombres :
 ➔ Par définition de la racine carré :
 $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$
 ➔ $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} \times \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2$
 Par définition de la racine carré :
 $= a \times b$
 Les nombres $\sqrt{a \times b}$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux
- Supposons $b \neq 0$. Etudions le carré de ces deux nombres :
 $(\sqrt{\frac{a}{b}})^2 = \frac{a}{b}$; $(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}})^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$
 Les nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$ et $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sont positif et ont même carré. D'après le corollaire du lemme, ces deux nombres sont égaux