

Les racines carrées

A. Présentation :

- Pour certain nombre, entier ou décimaux, il est facile de répondre à la question :

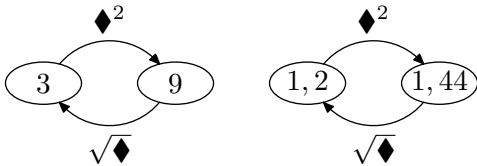
⇒ Quel est le nombre dont le carré vaut 9 ?

⇒ Quel est le nombre dont le carré vaut 1,44 ?

- **Définition :**

Pour tout **nombre positif** a , on appelle **racine carrée du nombre** a l'unique nombre positif dont le carré vaut a .

Ce nombre se note \sqrt{a} .

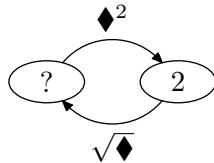


Ainsi, on note :

$$\sqrt{9} = 3 \quad ; \quad \sqrt{1,44} = 1,2 \quad ; \quad \sqrt{16} = 4$$

Prendre la racine carrée d'un nombre est l'opération inverse de prendre le carré d'un nombre.

- Par contre le nombre réalisant le diagramme ci-contre est ni un nombre entier, ni un nombre décimaux, ni un quotient. La seule notation possible de ce nombre est $\sqrt{2}$.



- Soit l'équation (E) : $x^2 = a$:

⇒ pour $a < 0$: (E) n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

⇒ pour $a = 0$: (E) a une seule solution : $\mathcal{S} = \{0\}$.

⇒ pour $a > 0$: (E) a deux solutions : $\mathcal{S} = \{-\sqrt{a}; \sqrt{a}\}$.

B. Propriétés :

- De la définition, on a les deux propriétés :

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad ; \quad \sqrt{a^2} = a$$

- Pour tous nombres a et b positifs avec $b \neq 0$, on a les deux propriétés :

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	La racine carrée d'un produit est égale au produit des racines carrées
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	La racine d'un quotient est égale au quotient des racines

- Par contre, aucune formule n'existe pour des additions ou des soustractions se trouvant sous la racine carrée :

$$\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1} \quad ; \quad \sqrt{9-4} \neq \sqrt{9} - \sqrt{4}$$

C. Simplifications :

- Pour simplifier une racine carrée, il faut trouver dans le nombre sous la racine carrée le plus de facteur sous la forme d'un carré :

$$18 = 9 \times 2 \quad ; \quad 72 = 9 \times 4 \times 2$$

- On utilise maintenant la propriété sur la racine carrée d'un produit :

⇒ $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

⇒ $\sqrt{72} = \sqrt{9 \times 4 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

- On utilise maintenant la propriété $\sqrt{a^2} = a$:

⇒ $\sqrt{18} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

⇒ $\sqrt{72} = \sqrt{9} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

- Pour supprimer les radicaux aux dénominateurs d'une fraction, les deux règles suivantes :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad ; \quad (\sqrt{at})^2 = a$$

Voici un exemple :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

- Pour aller un peu plus loin, si le dénominateur d'un quotient est la racine carrée d'un nombre, voici comment transformer ce quotient avec un entier au dénominateur :

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

D. Dans des calculs :

Les racines carrées étant aussi des nombres, on peut utiliser sur eux la **distributivité**, la **double distributivité** et les **identités remarquables**

- La **multiplication** des radicaux :

Il faut simplifier chaque racine carrée, puis multiplier les facteurs de même nature : les entiers entre eux et les racines carrées entre elles :

$$2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = (2 \times 4) \times (\sqrt{3} \times \sqrt{3}) = 8 \times 3 = 24$$

- L'**addition** de racines carrées :

il faut commencer à simplifier chacune des racines carrées, puis de simplifier en identifiant les termes ayant les mêmes facteurs :

$$\begin{aligned} \sqrt{8} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{18} &= \sqrt{2^2 \times 2} + 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3^2 \times 2} \\ &= 2 \times \sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 7 \times 3 \times \sqrt{2} \\ &= (2 + 3 + 21) \times \sqrt{2} = 36\sqrt{2} \end{aligned}$$

- La **double-distributivité** :

$$\begin{aligned} (5 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) &= 5 - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 \\ &= 5 - 5\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 3 - 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Les **identités remarquables** :

⇒ $(3 + \sqrt{2})^2 = 9 + 6\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 13 + 6\sqrt{2}$

⇒ $9x^2 - 3 = (3x)^2 - (\sqrt{3})^2 = (3x + 3)(3x - 3)$