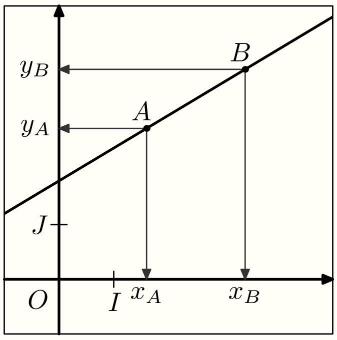
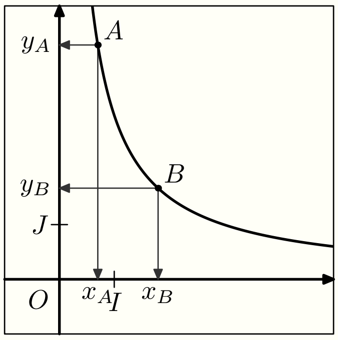
Variations de fonctions

A. Définitions:

Remarque :

Considérons les deux courbes représentées ci-dessous :





Ainsi, nous remarquons pour une courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction :

- Si la courbe $\mathscr{C}$ "***monte***" sur un intervalle I, alors tout couple de nombres *(a et b)* de l'intervalle I et leurs images *($f(a)$ et $f(b)$)* sont comparés dans le **même ordre**.
- Si la courbe $\mathscr{C}$ "***descend***" sur un intervalle I, alors tout couple de nombres *(a et b)* de l'intervalle I et leurs images *($f(a)$ et $f(b)$)* sont comparés dans l'**ordre contraire**.

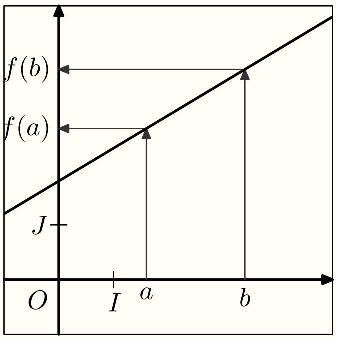
Définition :

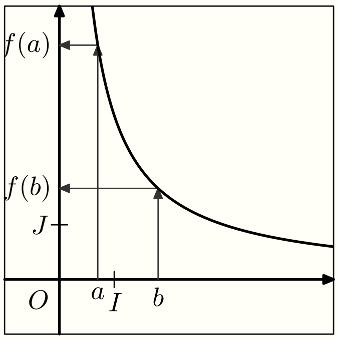
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que la fonction f est **croissante sur** I si pour tout nombre a et b de l'intervalle I, l'assertion suivante est vraie :
  Si $a<b$ alors $f(a)<f(b)$.
- On dit que la fonction f est **décroissante sur** I si pour tout nombre a et b de l'intervalle I, l'assertion suivante est vraie :
  Si $a<b$ alors $f(a)>f(b)$.
- On dit que la fonction f est **décroissante sur** I si pour tout nombre a et b de l'intervalle I, on a :
  $f(a)=f(b)$

Remarque :

On adapte maintenant notre première remarque aux fonctions :





- Deux nombres et leur image par une fonction **croissante** sont comparés dans le même ordre.
- Deux nombres et leur image par une fonction **décroissante** sont comparés dans l'ordre contraire.

B. Propositions:

Proposition :

Soit f une fonction affine dont l'expression est :
$f(x)=a{\cdot}x+b$

- Si $a<0$ alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$
- Si $a>0$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

Preuve :

Soit x et x' deux réels quelconques. Supposons la comparaison $x<x'$:

- Supposons $a<0$:
  $$\begin{aligned} x &< x' \\ a{\cdot}x &> a{\cdot}x' \\ a{\cdot}x+b &> a{\cdot}x'+b \\ f(a) &> f(b) \end{aligned}$$
  Deux nombres et leurs images par la fonction f sont comparés dans l'ordre contraire : la fonction f est décroissante.
- Supposons $a>0$:
  $$\begin{aligned} x &< x' \\ a{\cdot}x &< a{\cdot}x' \\ a{\cdot}x+b &< a{\cdot}x'+b \\ f(a) &< f(b) \end{aligned}$$
  Deux nombres et leurs images par la fonction f sont comparés dans le même ordre : la fonction f est croissante.

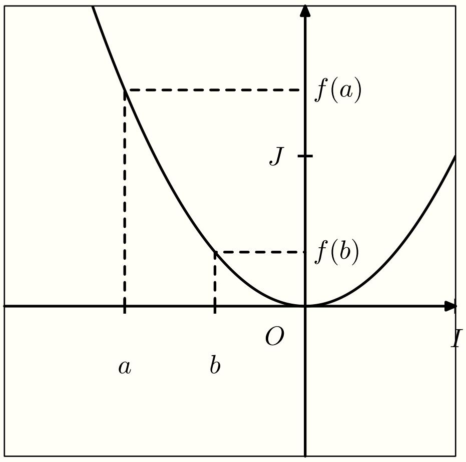
Proposition :

- La fonction carré est décroissante sur $\left]-\infty\,;0\right]$
- La fonction carré est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$

Preuve :

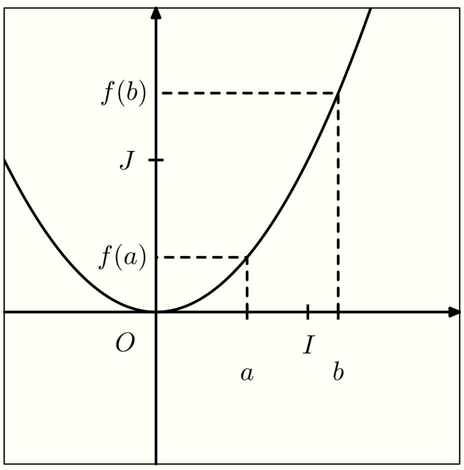
- Soit a et b deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_-$ vérifiant $a<b$.
  Etudions la différence : $f(a)-f(b)$.
  $$f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
  Etudions le signe de ces deux facteurs :
  - a et b sont deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_-$: $a+b$ est négatif.
  - De la comparaison $a<b$, on obtient : $a-b<0$

  On en déduit que le signe du produit :
  $$(a+b)(a-b)>0 \implies f(a)-f(b)>0$$
  $$\implies f(a)>f(b)$$
  Deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_-$ et leurs images par la fonction carré sont comparées dans l'ordre contraire : on vient d'établir la décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$.



- Soit a et b deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_+$ vérifiant $a<b$.
  Etudions la différence : $f(a)-f(b)$.
  $f(a)-f(b)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
  Etudions le signe de ces deux facteurs :
  - a et b sont deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_+$: $a+b$ est positif.
  - De la comparaison $a<b$, on obtient : $a-b<0$

  On en déduit que le signe du produit :
  $$(a+b)(a-b)<0 \implies f(a)-f(b)<0 \implies f(a)<f(b)$$
  Deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_+$ et leurs images par la fonction carré sont comparées dans le même ordre : on vient d'établir la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.



Remarque :

On peut traduire cette propriété par :

- Deux nombres négatifs et leur carré sont comparés dans l'ordre contraire.
- Deux nombres positifs et leur carré sont comparés dans le même ordre.

Proposition :

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;0\right[$ et sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$.

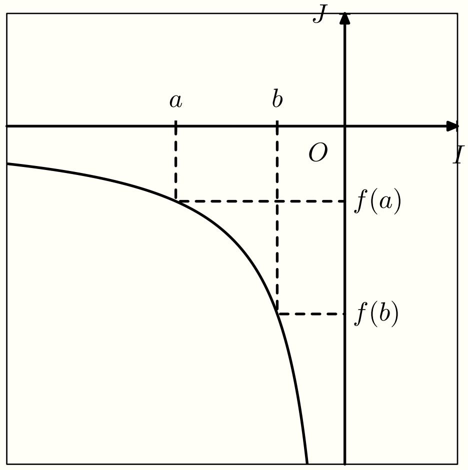
Preuve :

Soit a et b deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_-^*$ vérifiant $a<b$.
On a les transformations algébriques suivantes :
$$f(a)-f(b)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{a\cdot b}-\frac{a}{a\cdot b}=\frac{b-a}{a\cdot b}$$

Ce quotient est positif car :

- De la comparaison $a<b$, on a $0<b-a$: $b-a$ est positif ;
- Les nombres a et b appartiennent à $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que $a\cdot b$ est positif.

On en déduit les comparaisons suivantes :
$$\frac{b-a}{a\cdot b}>0 \implies f(a)-f(b)>0 \implies f(a)>f(b)$$
Deux nombres appartenant à $\mathbb{R}_-^*$ et leurs images sont comparés dans le sens contraire par la fonction inverse : on vient d'établir la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.



C. Exemples :

Exemple :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$f(x)=2\cdot\left(x+3\right)^2-4$

- La fonction f est **décroissante** sur $\left]-\infty\,;-3\right]$:

  Soit a et b deux nombres quelconques de l'intervalle $\left]-\infty\,;-3\right]$. Supposons la comparaison suivante sur ces deux nombres $a<b$.
  Déterminons la comparaison de leur image respective :
  $$a<b\leqslant -3$$
  $$a+3<b+3\leqslant 0$$
  Deux nombres négatifs et leur carrés sont comparés dans l'ordre contraire :
  $$\left(a+3\right)^2>\left(b+3\right)^2$$
  $$\left(a+3\right)^2-4>\left(b+3\right)^2-4$$
  $$f(a)>f(b)$$
  Deux nombres de l'intervalle $\left]-\infty\,;-3\right]$ et leurs images par la fonction f sont ordonnés dans l'ordre contraire.

- La fonction f est **croissante** sur $\left[-3\,;+\infty\right[$:

  Soit a et b deux nombres quelconques de l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$. Supposons la comparaison suivante sur ces deux nombres $a<b$.
  Déterminons la comparaison de leur image respective :

$$-3 \leqslant a < b$$
$$0 \leqslant a+3 < b+3$$
Deux nombres positifs et leur carrés sont comparés dans l'ordre contraire :
$$\left(a+3\right)^2 < \left(b+3\right)^2$$
$$\left(a+3\right)^2 - 4 < \left(b+3\right)^2 - 4$$
$$f(a) < f(b)$$
Deux nombres de l'intervalle $\left[-3\,;+\infty\right[$ et leurs images par la fonction f sont ordonnées dans le même ordre.

