Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Démonstration :

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :

$$u_\ell = u_0 + \ell\cdot r$$

Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= \big(u_0 + k\cdot r\big) + \big[u_0 + (n-k)\cdot r\big] \\ &= u_0 + k\cdot r + u_0 + (n-k)\cdot r = u_0 + u_0 + n\cdot r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_1$$

L'addition termes à termes des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$2\cdot S = \big(u_0+u_n\big) + \big(u_1+u_{n-1}\big) + \big(u_2+u_{n-2}\big) + \cdots + \big(u_{n-2}+u_2\big) + \big(u_{n-1}+u_1\big) + \big(u_n+u_0\big)$$

D'après la remarque précédente :

$$2\cdot S = \big(u_0+u_n\big) + \big(u_0+u_n\big) + \big(u_0+u_n\big) + \cdots + \big(u_n+u_0\big) + \big(u_n+u_0\big) + \big(u_n+u_0\big)$$

Cette somme comprend $n-1$ termes :

$$2\cdot S = (n+1)\cdots(u_0+u_n)$$

$$S = \frac{(n+1)\cdots(u_0+u_n)}{2}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q\neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q)\cdot S = (1-q)\cdot\big(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n\big)$$

$$(1-q)\cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q\cdot\big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q)\cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q\cdot v_0+q\cdot v_1+q\cdot v_2+\cdots+q\cdot v_{n-2}+q\cdot v_{n-1}+q\cdot v_n\big]$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdot + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdot + v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_0\cdot q^{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)\cdot(u_0+u_n)}{2}$$

Démonstration :

Pour tout entier naturel ℓ, le terme de rang k admet pour expression :

$$u_\ell = u_0 + \ell\cdot r$$

Ainsi, pour tout entier naturel k, on a :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= \big(u_0 + k\cdot r\big) + \big[u_0 + (n-k)\cdot r\big] \\ &= u_0 + k\cdot r + u_0 + (n-k)\cdot r = u_0 + u_0 + n\cdot r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_1$$

L'addition termes à termes des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$2\cdot S = \big(u_0+u_n\big) + \big(u_1+u_{n-1}\big) + \big(u_2+u_{n-2}\big) + \cdots + \big(u_{n-2}+u_2\big) + \big(u_{n-1}+u_1\big) + \big(u_n+u_0\big)$$

D'après la remarque précédente :

$$2\cdot S = \big(u_0+u_n\big) + \big(u_0+u_n\big) + \big(u_0+u_n\big) + \cdots + \big(u_n+u_0\big) + \big(u_n+u_0\big) + \big(u_n+u_0\big)$$

Cette somme comprend $n-1$ termes :

$$2\cdot S = (n+1)\cdots(u_0+u_n)$$

$$S = \frac{(n+1)\cdots(u_0+u_n)}{2}$$

Proposition :

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q tel que $q\neq 1$. Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Démonstration :

Notons S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v_n). On a :

$$S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n$$

$$(1-q)\cdot S = (1-q)\cdot\big(v_0+v_1+v_2+\cdots+v_{n-2}+v_{n-1}+v_n\big)$$

$$(1-q)\cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - q\cdot\big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big]$$

$$(1-q)\cdot S = \big[v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n\big] - \big[q\cdot v_0+q\cdot v_1+q\cdot v_2+\cdots+q\cdot v_{n-2}+q\cdot v_{n-1}+q\cdot v_n\big]$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdot + v_{n-2} + v_{n-1} + v_n - v_1 - v_2 - v_3 - \cdot + v_{n-1} - v_n - v_{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0 - v_0\cdot q^{n+1}$$

$$(1-q)\cdot S = v_0\cdot\big(1-q^{n+1}\big)$$

$$S = v_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$