

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel ℓ , le terme de rang k admet pour expression :

$$u_\ell = u_0 + \ell \cdot r$$

Ainsi, pour tout entier naturel k , on a :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= (u_0 + k \cdot r) + [u_0 + (n-k) \cdot r] \\ &= u_0 + k \cdot r + u_0 + (n-k) \cdot r = u_0 + u_0 + n \cdot r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1 + u_0$$

L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) \\ &\quad + \dots + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0) \end{aligned}$$

D'après la remarque précédente :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) \\ &\quad + \dots + (u_n + u_0) + (u_n + u_0) + (u_n + u_0) \end{aligned}$$

Cette somme comprend $n+1$ termes :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (n+1) \cdot (u_0 + u_n) \\ S &= \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2} \end{aligned}$$

Proposition :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . Pour tout entier naturel n , on a :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2}$$

Preuve :

Pour tout entier naturel ℓ , le terme de rang k admet pour expression :

$$u_\ell = u_0 + \ell \cdot r$$

Ainsi, pour tout entier naturel k , on a :

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= (u_0 + k \cdot r) + [u_0 + (n-k) \cdot r] \\ &= u_0 + k \cdot r + u_0 + (n-k) \cdot r = u_0 + u_0 + n \cdot r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

Notons, S la somme des premiers termes de la suite (u_n) :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Cette somme peut aussi s'écrire :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_2 + u_1 + u_0$$

L'addition, termes à termes, des deux expressions de S permet d'obtenir l'égalité :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) \\ &\quad + \dots + (u_{n-2} + u_2) + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0) \end{aligned}$$

D'après la remarque précédente :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) \\ &\quad + \dots + (u_n + u_0) + (u_n + u_0) + (u_n + u_0) \end{aligned}$$

Cette somme comprend $n+1$ termes :

$$\begin{aligned} 2 \cdot S &= (n+1) \cdot (u_0 + u_n) \\ S &= \frac{(n+1) \cdot (u_0 + u_n)}{2} \end{aligned}$$