Terminale S/Suites

1. Suites adjacentes :

Exercice 654

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.
2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.
   b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)
3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire ?

Exercice 3464

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1. a. Etablir que la suite (u_n) est décroissante.
   b. Etablir que la suite (v_n) est croissante.
2. a. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes.
   b. Que peut-on dire de la convergence de ces deux suites ?

Exercice 3466

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{3x-2}{x}$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. En déduire que pour tout nombre $x \in \left[\dfrac{3}{2}\,;4\right]$, on a :
   $$f(x) \in \left[\frac{3}{2}\,;4\right]$$

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{3\cdot u_n - 2}{u_n} \end{cases} \;;\; \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{3\cdot v_n - 2}{v_n} \end{cases}$$

2. Etablir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
   $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}\,;4\right]$

   De même, on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \in \left[\dfrac{3}{2}\,;4\right]$
3. Déterminer la valeur des trois premiers termes de chacune de ces suites.
4. a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
   c. Etablir l'encadrement suivant, par un raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n :
   $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant 3\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$
   d. Etablir que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. a. Justifier que la limite ℓ vérifie : $\ell = \dfrac{3\cdot\ell - 2}{\ell}$
   b. Justifier que la limite des deux suites (u_n) et (v_n) est 2.

Exercice 3467

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot u_n + 2 \end{cases} \;;\; \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cdot v_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (v_n) est décroissante.
3. Montrer que, pour tout entier naturel, on a l'encadrement :
   $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant 8 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
4. Etablir que les deux suites (u_n) sont adjacentes.
5. En déduire que ces deux suites convergent vers un même nombre ℓ ; déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3516

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3\cdot u_n + 1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} ; \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3\cdot v_n + 1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 d'une part et v_1, v_2, v_3 d'autre part.

2. Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ *(unité graphique : 5 cm)* tracer les droites D et Δ d'équations respectives :
$$y = \frac{3\cdot x + 1}{4} \quad ; \quad y = x$$
Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 ainsi que les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.
Les tracés seront effectués sur une feuille de papier millimétré.

3. On considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :
$$s_n = u_n + v_n$$
   a. Calculer s_0, s_1, s_2, s_3. A partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?

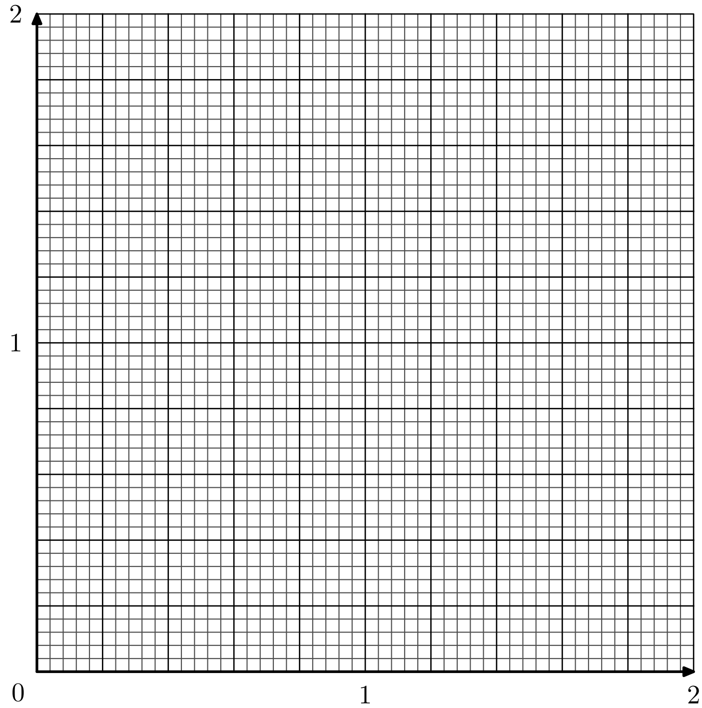
   b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que la suite (s_n) est une suite constante.

4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$d_n = v_n - u_n$$
   a. Montrer que la suite (d_n) est une suite géométrique.

   b. Donner l'expression de d_n en fonction de n.

5. En utilisant les résultats des questions 3. b. et 4. b. donner l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

6. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergente. Préciser leurs limites.

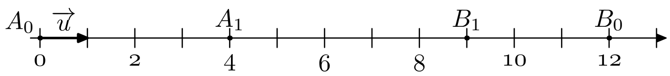


2. Suites adjacentes - Annales :

Exercice 3184

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O; \vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.



Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n; 2)$ et $(B_n; 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n; 1)$ et $(B_n; 3)$.

1. Sur le graphique, placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :
$$a_{n+1} = \frac{2\cdot a_n + b_n}{3}$$
On admet de même que : $\quad b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$u_n = b_n - a_n$$
   a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

   b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

   c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante *(on pourra utiliser le signe de u_n)*.

   b. Etudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence de suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :
$$v_n = 3a_n + 4b_n$$
Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 3227

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

2. Soit la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$w_n = v_n - u_n.$$
   a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique

de raison $\frac{1}{4}$.

b. Exprimer w_n en fonction de n et préciser la limite de la suite (w_n)

3. Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on déduire ?

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3235

Le graphique de l'annexe sera complétée et remis avec la copie.
Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$$

1. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0\,;2]$. Montrer que si $x \in [1\,;2]$ alors $f(x) \in [1\,;2]$.

2. (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
   - $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+1} = f(u_n)$.
   - $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $\quad v_{n+1} = f(v_n)$.

a. Le graphique donné en annexe représente la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$.
Construire sur l'axe des abscisses les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n) en laissant apparents tous les traits de construction.
A partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation et la convergence des suites (u_n) et (v_n) ?

b. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :
   - Pour tout entier naturel n : $\quad 1 \leqslant v_n \leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel n : $\quad v_{n+1} \leqslant v_n$.

On admettra que l'on peut démontrer de la même façon que :
   - Pour tout entier naturel n : $\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   - Pour tout entier naturel n : $\quad u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n :

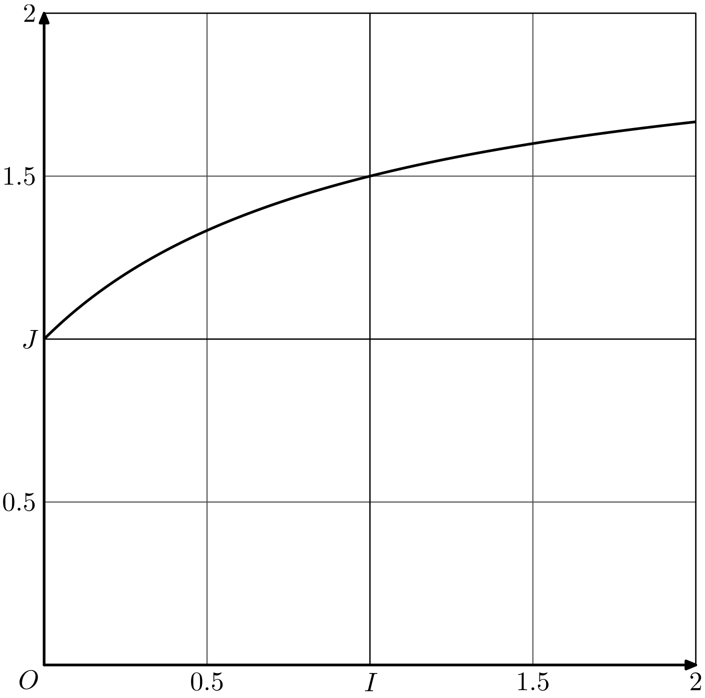
$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n+1)(u_n+1)}.$$

En déduire que pour tout entier naturel n :

$$v_n - u_n \geqslant 0 \quad ; \quad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

d. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n - u_n \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un même réel α.
Déterminer la valeur exacte de α.



Exercice 3270

On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(2\cdot a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot(a_n + 2\cdot b_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Soit D une droite munie d'un repère $\left(O\,;\overrightarrow{i}\right)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n.

1. Placez les points A_0, B_0, A_1, B_1, A_2 et B_2.

2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   Exprimez u_n en fonction de n.

3. Comparez a_n et b_n. Etudiez le sens de variation des suites (a_n) et (b_n). Interprétez géométriquement ces résultats.

4. Démontrez que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. En déduire que les segments $[A_nB_n]$ ont tous le même milieu I.

6. Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes et calculez leur limite. Interprétez géométriquement ce résultat.

Exercice 3243

Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.

Partie A : question de cours

On suppose connus les résultats suivants :

(1) deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$;

(2) si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante, alors pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, on a :

$u_n \leqslant v_n$;

(3) toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

“*Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite*”.

Partie B

On considère une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers zéro.

Exercice 3997

1. La suite u est définie par :

$$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}\cdot u_n + \frac{23}{27} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan, la droite d'équation $y = \dfrac{1}{3}\cdot x + \dfrac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;0)$.
Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \dfrac{23}{18}$.

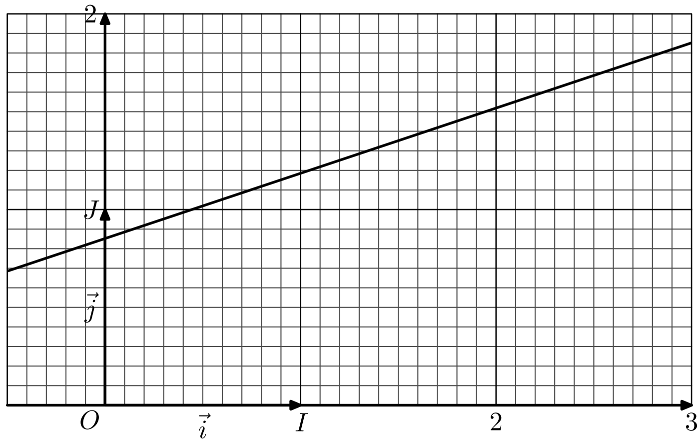
c. Démontrer que pour tout entier naturel n, on a :
$$u_n \geqslant \frac{23}{18}$$

d. Etudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$
c'est à dire que :
$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\cdot\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1{,}2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7. Ainsi :
$$v_0 = 1{,}2 \quad ; \quad v_1 = 1{,}27 \quad ; \quad v_2 = 1{,}277$$
En utilisant la question a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r *(c'est à dire le quotient de deux entiers.)*.

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.



Exercice 3245

Les quatres questions de cet exercice sont indépendantes et sont notées sur un point chacune.
Pour chaque question, il y a exactement deux propositions correctes. Le candidat doit indiquer sur sa copie les deux propositions vraies. Aucune justification n'est demandée.
Chaque réponse exacte rapporte 0,5 point, chaque réponse fausse enlève 0,25 point. Donner trois propositions ou plus d'une question, ou bien n'en donner aucune, ne rapporte aucun point.
Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

1. Les suites suivantes sont convergentes :

a. $\left(\dfrac{2^n}{n^{2005}}\right)_{n>0}$ b. $\left(\dfrac{2n + (-1)^n\cdot\sqrt{n}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

c. $\left(n\cdot\sin\dfrac{1}{n}\right)_{n>0}$ d. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}\right)_{n>1}$

2. On construire trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

$$\lim_{n\mapsto+\infty}(u_n) = -1 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}(w_n) = 1$$

Alors :

a. $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}(v_n) = 0$

b. La suite (u_n) est minorée.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $-1 \leqslant v_n \leqslant 1$.

d. On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Une suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1{,}5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a. La suite (u_n) converge vers 1, abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = 2x - 1$.

b. La suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1$, est géométrique.

c. La suite (v_n) est majorée.

d. La suite (w_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln(u_n - 1)$, est arithmétique.

4. Deux suites (x_n) et (y_n) sont définies pour $n > 0$ par les relations :

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

a. Les suites (x_n) et (y_n) sont toutes deux croissantes.

b. $x_3 = \frac{19}{20}$ et $y_3 = \frac{37}{60}$.

c. Les suites (x_n) et (y_n) ne sont pas majorées.

d. Les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

☐ **Exercice 3237**

1. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0\,;1]$:
$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}$$

2. a. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n}dx$

b. Déduire en utilisant 1., que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
puisque
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

3. On appelle U la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$
Démontrer que U est décroissante *(on pourra utiliser 2. b.)*

4. On désigne par V la suite de terme général :
$$V(n) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$
Démontrer que V est croissante.

5. Démontrer que U et V convergent vers une limite commune notée γ.
Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par la méthode de votre choix.

3. Suites et barycentres - Annales :

☐ **Exercice 3231**

Partie A

Etant donnés deux points distincts A_0 et B_0 d'une droite, on définit les points :

- A_1 milieu du segment $[A_0B_0]$
- B_1 barycentre de $\{(A_0\,;1)\,;(B_0\,;2)\}$

Puis, pour tout entier naturel n, A_{n+1} milieu du segment $[A_nB_n]$ et B_{n+1} barycentre de $\{(A_n\,;1)\,;(B_n\,;2)\}$

1. Placer les points A_1, B_1, A_2 et B_2 pour $A_0B_0 = 12\,cm$.
Quelle conjecture peut-on faire sur les points A_n et B_n quand n devient très grand ?

2. On munit la droite (A_0B_0) du repère $\left(A_0\,;\vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \frac{1}{12}\cdot\overrightarrow{A_0B_0}$. Soit u_n et v_n les abscisses respectives des points A_n et B_n. Justifier que pour tout entier naturel n strictement positif, on a :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

Partie B

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 12 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Démontrer que la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$ est une suite géométrique convergente et que tous ses termes sont positifs ;

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante puis que la suite (v_n) est décroissante.

3. Déduire des deux questions précédentes que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite.

4. On considère la suite (t_n) définie par : $t_n = 2u_n + 3v_n$.
Montrer qu'elle est constante.

Partie C

A partir des résultats obtenus dans les **parties A et B**, préciser la position limite des points A_n et B_n quand n tend vers plus l'infini.

4. Suite et passage à la limite - Annales :

☐ **Exercice 3148**

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$$

1. a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
Etudier le sens de variation de f, et tracer sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. *(On prendra comme unité 2 cm).*

b. Utiliser le graphique précédent pour construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 de l'axe $\left(O\,;\vec{i}\right)$ d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

b. Montrer que pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$: $f(x) \leqslant x$.

c. En déduire que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

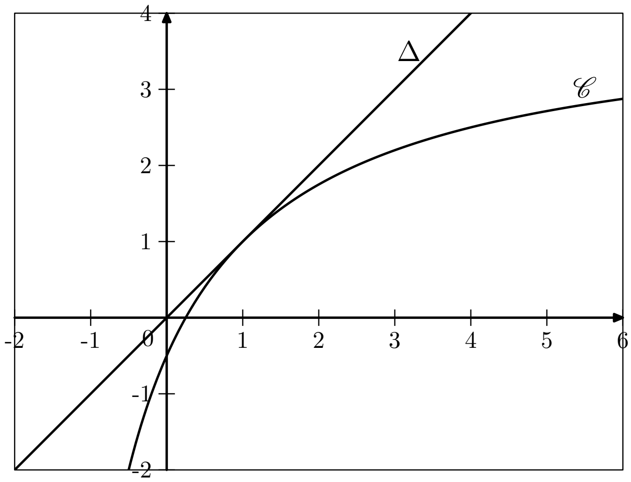
d. Prouver qu'elle converge.

3. Soit ℓ la limite de la suite (u_n). Montrer que ℓ est solution de l'équation :
$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
En déduire sa valeur.

Exercice 3902

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout nombre entier n par :
$$u_{n+1} = \frac{4 \cdot u_n - 1}{u_n + 2}$$
Si f est la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ alors on a, pour tout nombre entier naturel n :
$u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne en annexe une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. **a.** Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, on a :
$u_n - 1 > 0$

b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Valider par une démonstration les conjectures émises à la question **1. b.**

3. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

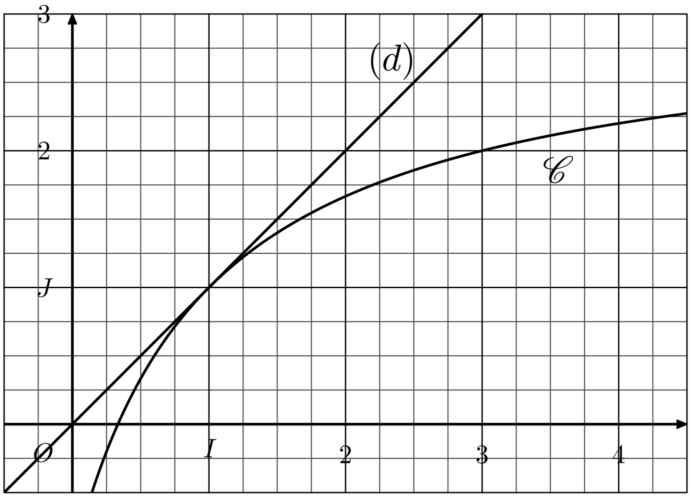
b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 5017

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$$
On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 4 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. On a tracé, ci-dessous, la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et la droite (d) d'équation $y = x$.



a. Sur le graphique, placer sur l'axe des abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3. Faire apparaître les traits de construction.

b. Que peut-on conjecturer sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, nous allons démontrer les conjectures formulées à la question **1. b.** :

a. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} \leqslant u_n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

