

# Terminale S / Nombres complexes

## 1. Écriture algébrique d'un nombre complexe :

### Exercice 6788

Sachant que  $i^2 = -1$ , simplifier l'écriture des expressions suivantes :

- a.  $i^2$       b.  $i^3$       c.  $i^4$       d.  $i^5$   
 e.  $i^{14}$       f.  $i^{100}$       g.  $i^{-1}$       h.  $i^{-3}$

### Exercice 3782

Déterminer l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes ci-dessous :

- a.  $z_1 = 3 \cdot (2 - i) + i \cdot (3 + 2i)$       b.  $z_2 = (5 + 2i) \cdot (1 - i)$   
 c.  $z_3 = -5i \cdot (5 - 4i) - 3i$       d.  $z_4 = (5 + 2i)^2$   
 e.  $z_5 = (2 - i)^2 - 2 \cdot (1 + 3i)^2$       f.  $z_6 = (5 + 2i) \cdot (5 - 2i)$

### Exercice 3788

Soit  $x$  un nombre réel. On considère le nombre complexe  $z$  défini par l'égalité :  
 $z = (x + 2i) \cdot (1 - xi)$

- Déterminer l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .
- Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ ,  $z$  est un nombre réel ?
  - Pour quelle(s) valeur(s) de  $x$ ,  $z$  est un imaginaire pur ?

### Exercice 5310

- On considère le polynôme  $P$  définie sur  $\mathbb{C}$  par :  
 $P = 2 \cdot z^3 + z^2 + 2 \cdot z + 1$

Vérifier que les trois nombres ci-dessous sont solutions des racines du polynôme  $P$  :

$$z_1 = -i \quad ; \quad z_2 = i \quad ; \quad z_3 = -\frac{1}{2}$$

- On considère le polynôme  $Q$  définie sur  $\mathbb{C}$  par :  
 $Q = z^3 - 2 \cdot z^2 + 2 \cdot z$

Vérifier que le nombre complexe  $z_4 = 1 - i$  est une racine du polynôme  $Q$ .

### Exercice 5133

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a.  $z_1 = \frac{1+i}{i}$       b.  $z_2 = \frac{1}{1-i}$       c.  $z_3 = \frac{-2+i}{2+i}$

### Exercice 5327

Donner la valeur de  $Re(z)$  et  $Im(z)$  pour chacun des complexes ci-dessous :

a.  $z = (2+i)^2$       b.  $z = \frac{3-4i}{1+i}$       c.  $z = \frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}i}$

### Exercice 5309

On considère les deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  définis par :  
 $z_1 = 1 + i \quad ; \quad z_2 = 5 - 2i$

Déterminer l'écriture algébrique des nombres suivants :

a.  $z_1 + z_2$       b.  $z_1 - z_2$       c.  $z_1 - 2 \cdot z_2$   
 d.  $z_1 \cdot z_2$       e.  $\frac{z_1}{z_2}$       f.  $\frac{z_2}{z_1 - z_2}$

## 2. Equations :

### Exercice 5324

- Dans  $\mathbb{C}$ , on considère l'équation  $(E)$  définie par :  
 $(E) : z + 2 - i = (1 + i) \cdot z$

Montrer que le nombre complexe  $-1 - 2i$  est solution de l'équation  $(E)$ .

- Dans  $\mathbb{C}$ , on considère l'équation  $(F)$  définie par :  
 $(F) : (z - 1 + 2i)(z + 2i) = z^2 - i$

Montrer que le nombre complexe  $-i$  est solution de l'équation  $(F)$ .

### Exercice 3799

Dans  $\mathbb{C}$ , résoudre les équations du premier degré suivantes :

a.  $3 \cdot z + i \cdot z = 0$       b.  $z + 2i \cdot z = i$   
 c.  $z + 2 - i \cdot (z + 1) = 0$       d.  $\frac{z-5}{z-i} = i$

### Exercice 3817

Dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes :

- Montrer que :  $(1 + i)^6 = -8 \cdot i$ .
- On considère l'équation  $(E) : z^2 = -8 \cdot i$ 
  - Déduire de 1. une solution de l'équation  $(E)$ .

- b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous écriture algébrique.

3. Dédurre également de 1. une solution de l'équation : (E') :  $z^3 = -8 \cdot i$

### 3. Conjugué : définitions :

#### Exercice 5326

Donner l'écriture algébrique du conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

- a.  $z = 1 + i$       b.  $z = 2 \cdot i - 3$       c.  $z = i \cdot (1 + 2 \cdot i)$   
d.  $z = \frac{1}{i}$       e.  $z = \frac{2}{2 - i}$       f.  $z = (1 - i)(1 + i)$

### 4. Conjugué : propriétés algébriques :

#### Exercice 6789

Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  sont des nombres complexes conjugués.

- a.  $z_1 = (1 + i) \cdot (2 - i)$  ;  $z_2 = (1 - i) \cdot (2 + i)$   
b.  $z_1 = \frac{i - 3}{2 + 2 \cdot i}$  ;  $z_2 = \frac{-i - 3}{2 - 2 \cdot i}$   
c.  $z_1 = (1 - i)^5$  ;  $z_2 = (1 + i)^5$

#### Exercice 3824

Pour chacun des nombres complexes ci-dessous :

- sans calcul, donner une expression du nombre complexe conjugué du nombre  $z$  ;

- puis, donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $\bar{z}$ .

- a.  $z = (2 - i)(5 + 3 \cdot i)$       b.  $z = i \cdot (3 + 2 \cdot i) - 3 + i$   
c.  $z = \frac{5 - 2 \cdot i}{i - 2}$       d.  $z = \frac{(3 - 2 \cdot i)(1 - i)}{1 + i}$

#### Exercice 5333

On considère les deux nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  :

$$z_1 = \frac{3 - 2i}{1 + i} ; z_2 = \frac{3 + 2i}{1 - i}$$

1. Que peut-on dire des nombres complexes  $z_1$  et  $z_2$  ?
2. a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre  $z_1$ .  
b. En déduire l'expression de  $z_1 + z_2$  et  $z_1 - z_2$ .

### 5. Conjugué : équations :

#### Exercice 6790

Déterminer les valeurs des réels  $a$  et  $b$  réalisant l'égalité suivante :

$$2 \cdot a + b \cdot (2 + i) - 3 \cdot i = a \cdot (i - 2) + b \cdot (1 - 2 \cdot i)$$

#### Exercice 3800

Résoudre les équations suivantes :

- a.  $z + \bar{z} = 6$       b.  $z + \bar{z} = i$   
c.  $z + 2 \cdot \bar{z} = 8 + i$       d.  $i \cdot \bar{z} + 2 \cdot (z - 5) = 0$

### 6. Equations du second degré :

#### Exercice 3802

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations du second degré suivantes :

- a.  $z^2 - 3 \cdot z + 4 = 0$       b.  $z^2 - 4 \cdot z + 4 = 0$   
c.  $3 \cdot z^2 + 3 \cdot z + 2 = 0$       d.  $z^2 - 4 \cdot z - 1 = 0$

#### Exercice 3803

On considère la fonction complexe définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{2\}$  par la relation :

$$f: z \mapsto \frac{z - 4}{z - 2}$$

Déterminer l'ensemble des nombres complexes invariants par cette fonction.

#### Exercice 5331

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$(E) : z^3 + 4 \cdot z^2 + 2 \cdot z - 28 = 0$$

1. Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(E) : (z - 2)(z^2 + a \cdot z + b) = 0$$

2. Résoudre l'équation (E).

#### Exercice 6781

Dans  $\mathbb{C}$ , on considère l'équation  $(\mathcal{E}_\lambda)$  dépendant du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  ;

$$x^2 - 3 \cdot x + 4 = \lambda$$

Pour quelles valeurs de  $\lambda$ , l'équation  $(\mathcal{E}_\lambda)$  admet deux solutions distinctes conjuguées.

#### Exercice 6811

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe  $z$  :

$$(E) : z^2 + 2 \cdot a \cdot z + a^2 + 1 = 0$$

où  $a$  désigne un nombre réel quelconque.

Une seule des propositions suivante est exacte. Recopier la réponse choisie et justifier cette proposition

- Pour toute valeur de  $a$ ,  $(E)$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{C}$ .
- Pour toute valeur de  $a$ , les solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$  ne sont pas réelles et elles sont conjuguées.
- Pour toute valeur de  $a$ , les solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{C}$  ne sont pas réelles et elles ne sont pas conjuguées.
- Il existe une valeur de  $a$  pour laquelle  $(E)$  admet au moins une solution.

**Exercice 6794**



On donne le nombre complexe :  $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 + z + 1 = 0$
- Démontrer les égalités suivantes :
  - $j^3 = 1$
  - $j^2 = -1 - j$
- On suppose l'existence de trois nombres complexes  $a$ ,  $b$  et  $c$  vérifiant l'égalité :  $a + j \cdot b + j^2 \cdot c = 0$ 
  - Démontrer l'égalité :  $a - c = j \cdot (c - b)$
  - Démontrer l'égalité :  $a - b = j^2 \cdot (b - c)$

## 7. Equations du second degré et changement de variables :

**Exercice 6204**



- Dans  $\mathbb{C}$ , on considère le polynôme :  $z^2 + 6z + 25$ . Déterminer ses racines.
- Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $a$  et  $b$  définis par :  $a = (1 + 2i)^2$  ;  $b = (1 - 2i)^2$
  - En déduire les solutions de l'équation :  $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

**Exercice 5958**



Pour tout nombre  $z$ , on pose :  $P(z) = z^4 - 1$ .

- Factoriser  $P(z)$  en produit de facteurs du premier degré.
- En déduire les solutions dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes de l'équation  $P(z) = 0$ , d'inconnue  $z$ .
- Déduire de la question précédente les solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation d'inconnue  $z$  :  $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$

## 8. Equations et conjugués :

**Exercice 3787**



- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $x^2 + x + 1 = 0$
- On considère le nombre complexe  $j = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
  - Déterminer l'écriture algébrique des deux nombres complexes :  $j^2$  ;  $j^3$

- Déterminer l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :  $1 + j + j^2$  ;  $1 + \bar{j} + \bar{j}^2$
- Dans  $\mathbb{C}$ , de quelle équation du second degré, les nombres  $j$  et  $\bar{j}$  sont-ils solutions ?
- Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, l'égalité suivante pour tout entier naturel  $n$  :  $(1 + j)^{2n+1} = -j^{n+2}$

## 9. Ensembles de solutions :

**Exercice 6806**



On considère les trois ensembles, définis ci-dessous, de couples de réels :

- $\mathcal{E}_1 = \{(x; y) \mid 2 \cdot x + y - 1 = 0\}$
- $\mathcal{E}_2 = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 - 2 \cdot x + 4 \cdot y - 4 = 0\}$
- $\mathcal{E}_3 = \{(x; y) \mid x \cdot y + 2 \cdot y = 0\}$

On considère le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; I; J)$ . Donner pour chacun des trois ensembles ci-dessus :

- la nature de leur représentation dans le plan,
- des éléments caractérisants leur représentation.

**Exercice 6776**



A tout nombre complexe  $z$ , on associe un nombre complexe  $z'$  défini par :

$$z' = z^2 + 4 \cdot z + 3$$

Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  tel que  $z'$  soit un nombre réel.

**Exercice 6353**



Parmi les réponses proposées, une seule est correcte. Laquelle ? Justifier votre réponse.

Considérons l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  vérifiant :  $\frac{1}{z^2 + 1}$  soit un réel.

L'ensemble  $\mathcal{E}$  est :

- l'ensemble des nombres réels ;
- l'ensemble des imaginaires purs privé de  $i$  et de  $-i$  ;

## 10. Module d'un nombre complexe :

### Exercice 5345

Déterminer le module des nombres complexes suivants :

- |                               |   |   |
|-------------------------------|---|---|
| a. $1 - 2 \cdot i$            | b. $-5 \cdot i$                             | c. $(3 - 2 \cdot i)(2 + i)$                     |
| d. $-i \cdot (1 - 2 \cdot i)$ | e. $\frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot i}$ | f. $\frac{3 - i \cdot \sqrt{3}}{-\sqrt{3} + i}$ |

## 11. Module : propriétés algébriques :

### Exercice 3846

- Établir l'égalité suivante pour tout nombre complexe  $z$  non nul :  

$$\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \overline{\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)} = -\bar{z}^2 \cdot \left|\frac{1}{z^2} - 1\right|^2$$
- Pour tout nombre complexe  $z$ , on définit le nombre com-

plexe  $z'$  par :

$$z' = \frac{(3 + 4 \cdot i) \cdot z + 5 \cdot \bar{z}}{6}$$

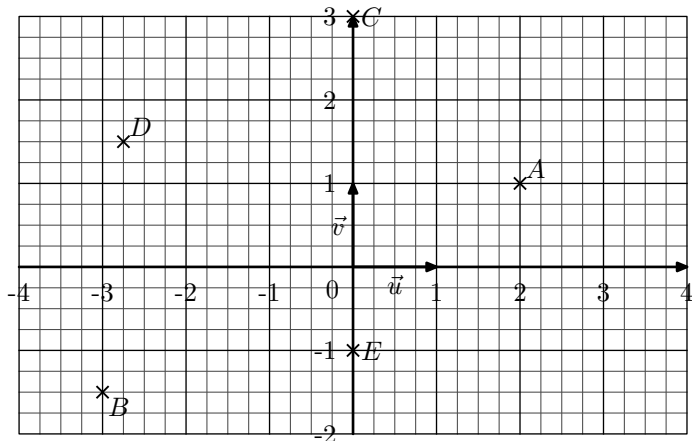
- Pour tout nombre complexe  $z$ , établir l'égalité :  

$$\frac{z' - z}{1 + 2 \cdot i} = \frac{z + \bar{z}}{6} + i \cdot \frac{z - \bar{z}}{3}$$
- En déduire que le nombre  $\frac{z' - z}{1 + 2 \cdot i}$  est un nombre réel.

## 12. Représentation graphique :

### Exercice 3784

On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  et les cinq points représentés ci-dessous :



- Déterminer les écritures algébriques des affixes des points  $A, B, C, D, E$ .
- Placer dans le plan les points  $F, G, H$  et  $I$  d'affixes respectives  $z_1, z_2, z_3$  et  $z_4$  définies par :

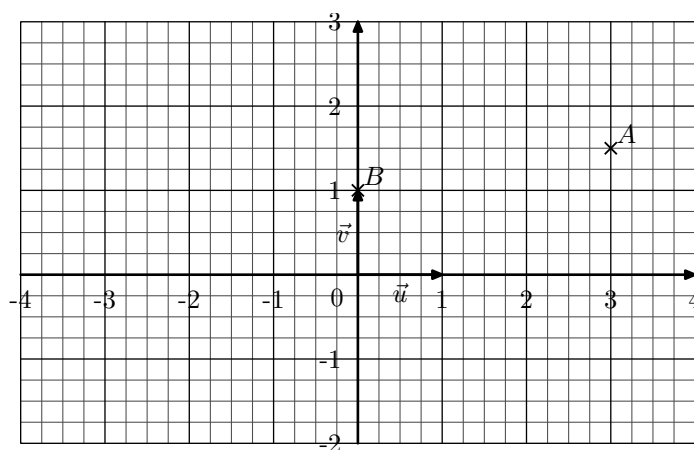
$$z_1 = 3 - i \quad ; \quad z_2 = \frac{3}{2} \cdot i$$

$$z_3 = -\frac{7}{4} + 2 \cdot i \quad ; \quad z_4 = \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \cdot i$$

- Déterminer l'affixe du milieu du segment  $[EF]$ .

### Exercice 3785

On considère le plan muni d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  ainsi que les points  $A$  et  $B$  représentés ci-dessous :



On note  $z_A$  et  $z_B$  les affixes respectives des points  $A$  et  $B$ .

- Donner les écritures algébriques des affixes des points  $A, B$ .
- Placer le point  $C$  d'affixe  $-z_A$ .
  - Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $C$  ?
- Placer le point  $D$  d'affixe  $\bar{z}_A$ .
  - Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $D$  ?
- Placer le point  $E$  d'affixe  $-\bar{z}_A$ .
  - Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $E$  ?
- Placer le point  $F$  d'affixe  $\frac{1}{2} \cdot z_A$ .
  - Que peut-on dire de la position du point  $F$  ?
- Placer le point  $G$  d'affixe  $z_A + (-2 - 2 \cdot i)$ .

b. Quelle transformation géométrique permet de transformer le point  $A$  en  $G$  ?

7. On considère le point  $H$  d'affixe  $z_H$  vérifiant l'égalité :

$$z_H - z_B = \frac{1}{2} \cdot (z_A - z_B)$$

a. En résolvant l'équation, déterminer l'écriture algébrique de l'affixe  $z_H$  du point  $H$ .

b. Que peut-on dire de la position du point  $H$  ?

### Exercice 6797

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{C}$  par la relation :

$$f(z) = z + \bar{z}^2$$

1. Notons  $a$  et  $b$  les nombres réels tels que  $z$  admettent pour écriture algébrique  $z = a + ib$ .

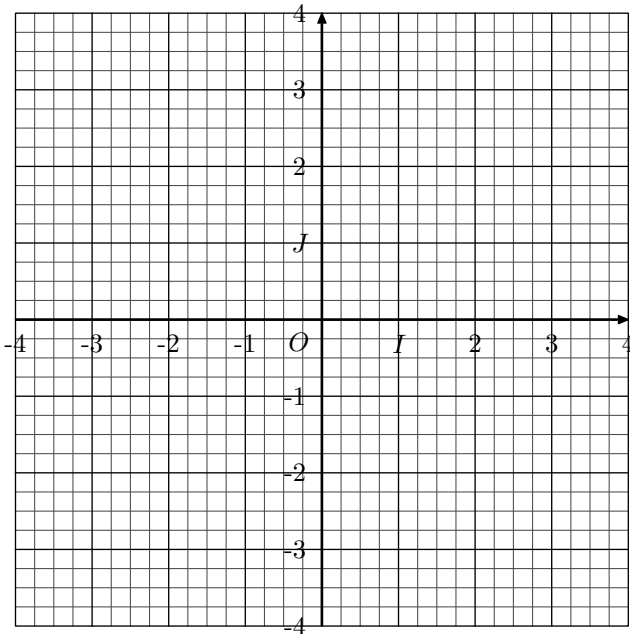
Donner l'écriture algébrique du nombre complexe  $f(z)$ .

2. Dans cette question, on cherche à déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$  des nombres complexes  $z$  tels que  $f(z)$  est un réel. C'est à dire :

$$\mathcal{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}[f(z)] = 0\}$$

a. Soit  $z$  un nombre complexe appartenant à  $\mathcal{E}$ . Déterminer l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

b. Représenter, dans le plan complexe ci-dessous et en rouge, l'ensemble  $\mathcal{E}$ .



### Exercice 6792

On munit le plan complexe d'un repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On définit la suite  $(z_n)$  de nombres complexes par :

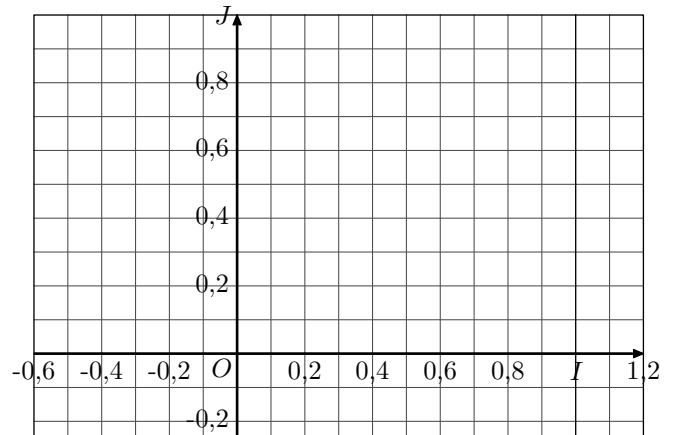
$$z_0 = 1 \quad ; \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot i\right) \cdot z_n$$

1. Déterminer l'écriture algébrique des quatre premiers termes de la suite  $(z_n)$ .

2. A l'aide de votre calculatrice, déterminer l'écriture algébrique des termes  $z_4$  et  $z_5$ .

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $M_n$  les images du nombre complexe  $z_n$ .

a. Placer les points  $M_0, \dots, M_5$  dans le repère ci-dessous :



b. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des triangles  $OM_0M_1$ ,  $OM_1M_2$  et  $OM_2M_3$ .

## 13. Géométrie et module :

### Exercice 3815

On considère les points  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $-i$  et  $7i$ .

Montrer que tout point  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant :

$$z = 3 \cdot i + 4 \cdot e^{i\theta} \quad \text{où } \theta \in \mathbb{R}$$

appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[BC]$ .

### Exercice 3813

Le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = -1 - i\sqrt{3}$$

1. Etablir que l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  d'affixe  $z$  qui vérifient :

$$2(z + \bar{z}) + z \cdot \bar{z} = 0$$

est un cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $-2$ . Préciser son rayon. Construire  $\Gamma_2$ .

2. Vérifier que les points  $A$  et  $B$  sont des éléments de  $\Gamma_2$ .

## 14. Modules et équations cartésiennes :

### Exercice 3844

Soit  $z$  un nombre complexe, on considère les relations suivantes :

$$(E) : |z - 2 + i| = 5 \quad ; \quad (F) : |z + i| = |z + 1 - 2i|$$

1.
  - a. Justifier que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant la relation  $(E)$  est un cercle. Préciser son centre et son rayon.
  - b. Soit  $a+ib$  l'écriture algébrique de l'affixe du point  $M$  ; déterminer une relation sur  $a$  et  $b$  caractérisant la relation  $(E)$ .
2.
  - a. Justifier que l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant la relation  $(F)$  est une droite. Préciser sa nature.
  - b. Soit  $a+ib$  l'écriture algébrique de l'affixe du point  $M$  ; déterminer une relation sur  $a$  et  $b$  caractérisant la relation  $(E)$ .