

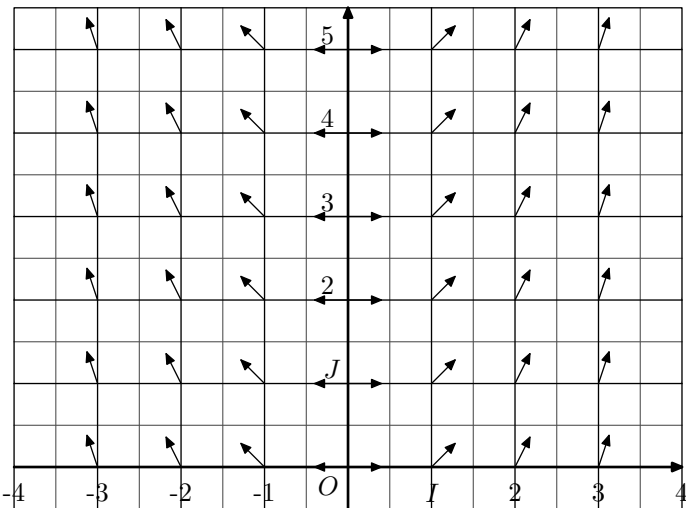
Terminale S/Exponentielles

1. Relations différentielles :

Exercice 3340

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} vérifiant la relation :
 $f'(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

- Donner au moins deux fonctions qui vérifient cette relation.
- On propose le champs de tangentes représenté ci-dessous :



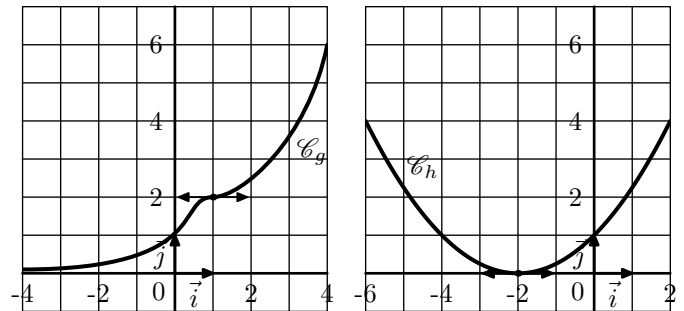
- Vérifier que chaque tangente représentée sur la droite d'équation $x=2$ a pour coefficient directeur 2.
 - Vérifier que pour chaque tangente ayant pour origine le point de coordonnées $(x; y)$, son coefficient directeur est x .
3. On considère maintenant la fonction f qui vérifie les deux conditions suivantes :

$$f(0) = \frac{3}{2} ; f'(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Tracer la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction f .

Exercice 3580

On considère deux fonctions g et h dont les représentations graphiques sont données ci-dessous :



Justifier que, dans les deux cas, ces courbes ne vérifient pas les conditions d'une fonction f telle que :

$$f(0) = 1 ; f'(x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3342

Le nombre d'atomes d'une source radioactive a tendance à diminuer dans le temps. On note $N(t)$ le nombre de noyau à l'instant t . En observant ce phénomène sur variation de temps, Δt , on se rend compte que le nombre d'atomes a connu une variation de $\Delta N(t)$ et on a réussi à établir la formule suivante :

$$\frac{\Delta N(t)}{N(t)} = -\lambda \cdot \Delta t$$

où λ est une constante dépendant uniquement de la nature des noyaux observés.

- La durée de demi-vie du Radon-220 est de 56 s. Déterminer une valeur approchée de la constante λ dans le cas du Radon-220.
 - On part d'un échantillon contenant 240 g contenant environ $6,02 \times 10^{23}$ noyaux de radon. Déterminer le temps à attendre pour que la quantité observée pèse :
 120 g ; 60 g
- Etablir l'égalité suivante : $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda \cdot N(t)$
 - En supposant que la fonction N , dépendant du temps t , est dérivable, établir la formule suivante :
 $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$

2. Propriétés algébriques :

Exercice 3589

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\exp(3) \cdot \exp(5)$ b. $\exp(-2) \cdot \exp(4)$

c. $\frac{1}{\exp(-5)}$ d. $[\exp(5)]^3$

Exercice 3590 

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^3 \cdot e^4$

b. $e^4 \cdot e^{-4}$

c. $(e^4)^3 \cdot e^4$

d. $\frac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$

e. $(e^5 - e^4)^2 - (e^5 + e^4)^2$

f. $\frac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

3. Equations et inéquations :**Exercice 3593** Résoudre les équations suivantes sur \mathbb{R} :

a. $\exp(x) = e$

b. $\exp(-x) = 1$

c. $\exp(2x-1) = e$

d. $e^{x^2+x} = 1$

e. $e^x - e^{-x} = 0$

f. $e^{x^2+5} = (e^{x+2})^2$

Exercice 6873 

Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

a. $e^x + e^{-x} = e^x \cdot (\dots + \dots)$

b. $\frac{e^x}{x^2} = \left(\frac{e^{\dots}}{\dots}\right)^2$

c. $1 + e^{-x} = \frac{\dots + \dots}{e^x}$

d. $\frac{1 + e^x}{e^{2x}} = \dots + \dots$

e. $\frac{e^{3x} - e^x}{e^{3x} + e^{2x}} = \frac{1 - \dots}{1 + \dots}$

f. $e^{16x} = (e^{\dots})^2$

Exercice 3594 Résoudre les inéquations suivantes sur \mathbb{R} :

a. $\exp(x) < e$

b. $\exp(-x) \geq 1$

c. $e^{2x-1} > e^x$

d. $e^x + e^{-x} < 2$

(Pour la dernière inéquation, pensez à une factorisation)

4. Equations et inéquations avec changement de variables :**Exercice 5846**  

Résoudre l'équation et l'inéquation ci-dessous :

a. $e^{2x} + 2 \cdot e^x - 3 = 0$

b. $e^{2x} + e^x - 2 < 0$

Exercice 6872  Résoudre l'inéquation : $2 \cdot e^{2 \cdot x} + 6 \cdot e^x - 8 < 0$ **Exercice 5845**  

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\frac{e^x + 3}{e^x - 1} > 0$

b. $-e^{2x} - e^x + 2 > 0$

5. Limites aux bornes de la fonction exponentielle :**Exercice 3614** 

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1}$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1}$

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

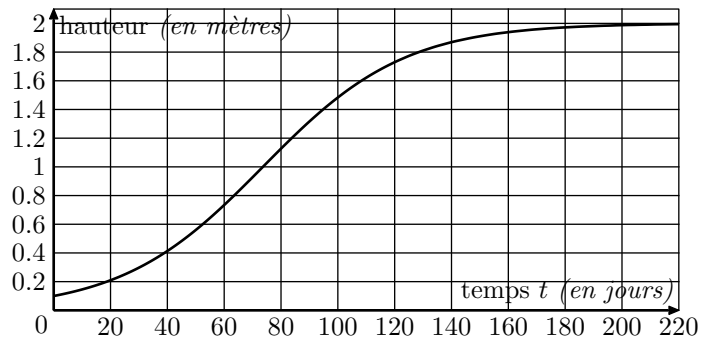
d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 5847   

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.



On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type :

$$h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-0,04 \cdot t}}$$

où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure $0,1 \text{ m}$ et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m .Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.**6. Limites par comparaison de croissance :**

Exercice 3661 


Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} \cdot e^{-x}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot (x^2 - x + 1)$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^{-x} - 1}$ d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$
 e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + 3x + 1$ f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} - e^{-x}$

Exercice 3710   **7. Limites par identification aux nombres dérivés :****Exercice 3662**  

Déterminer la valeur des limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$ b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$
 c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$ d. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (e^{\frac{3}{x}} - 1)$
 e. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1)$

8. Dérivées :**Exercice 3592** 

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

- a. $f(x) = e^{-x}$ b. $g(x) = x \cdot e^x$
 c. $h(x) = e^{x^2+x}$ d. $j(x) = \frac{1}{1 - e^x}$


Exercice 3612 

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x \cdot e^{x+1}$ b. $g(x) = e^{x^2+1}$
 c. $h(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{3x+1}$ d. $j(x) = \frac{e^{x+1}}{2 \cdot x + 1}$
 e. $k(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x}$ f. $\ell(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{2x}}$

Exercice 6919   

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :
 $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

9. Etudes de fonctions :**Exercice 3618** 

On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

On appelle \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f .

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Etablir le tableau de variation de la fonction f .
- Préciser les différentes asymptotes de la courbe \mathcal{C}_f .

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

Le but de cet exercice est de déterminer les deux limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- Soit $X = \frac{2}{x-1}$. Prouver l'égalité :

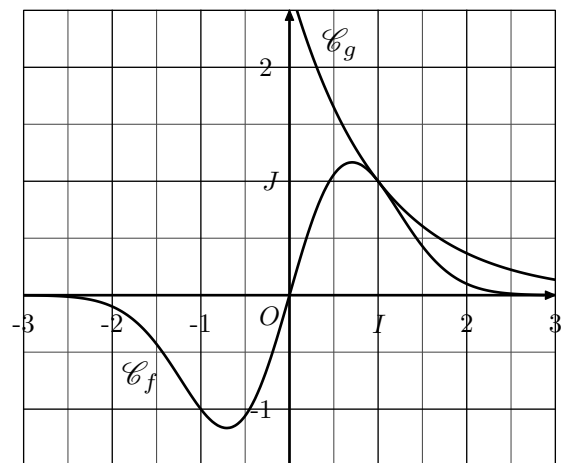
$$\frac{2}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{e}{2} \cdot X^2 \cdot e^X$$

- En déduire la valeur des limites recherchées.

et la fonction g définie pour tout réel x par :

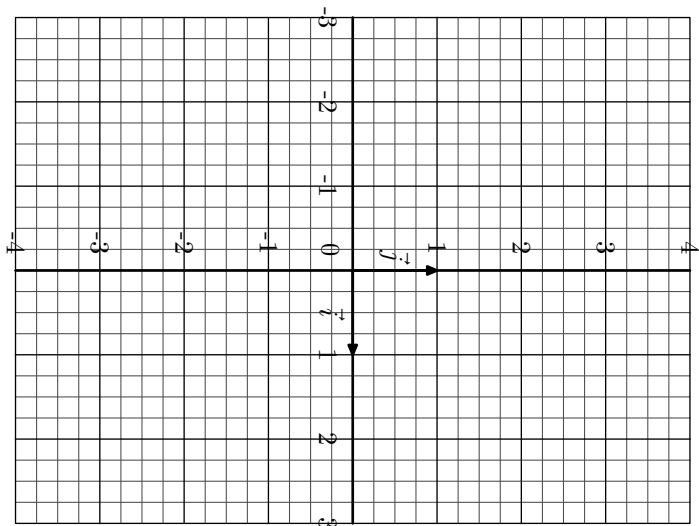
$$g(x) = e^{1-x}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g respectivement des fonctions f et g .



Justifier qu'au point d'abscisse 1, les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g admettent la même tangente.

- Tracer la courbe \mathcal{C}_f .



Exercice 3665



On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \frac{4 \cdot e^x}{e^x + 7}$$

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f .

1. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \frac{4}{1+7e^{-x}}$
2. a. Démontrer que la courbe \mathcal{C} admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
b. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
c. Démontrer que pour tout réel x : $0 < f(x) < 4$.

Exercice 5851



Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$$

1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.
b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0; 1]$ en un réel α . Donner la va-

leur de α arrondie au centième.

2. Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0; 1]$: $x - e^{-x} + 1 = e^{-x} - x - e^{-1} + 1$

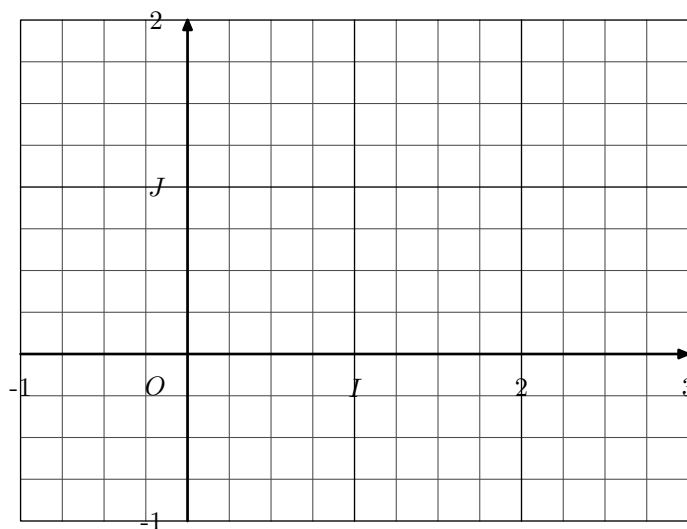
Exercice 3677



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{-2x} - 3 \cdot e^{-3x}$

On nomme \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 1 cm.

1. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , on a : $f(x) = 3 \cdot e^{-2x} \cdot \left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
3. Etudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
4. a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des ordonnées.
b. Justifier que la courbe \mathcal{C}_f intercepte l'axe des abscisses en un seul point. Donner la valeur approchée des coordonnées de ce point d'intersection.
5. Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_f dans le repère ci-dessous :



10. Etudes de fonctions et problèmes :

Exercice 5990



Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par les relations :

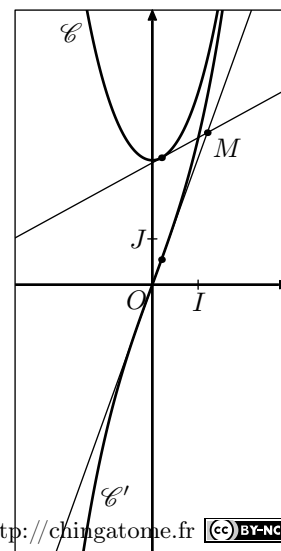
- $f(x) = \frac{e^{1+x} + e^{1-x}}{2}$

- $g(x) = \frac{e^{1+x} - e^{1-x}}{2}$

Dans un repère orthonormal $(O; I; J)$, on donne les courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}' respectivement représentative des fonctions f et g :

Partie A : étude de la position relative des deux courbes

1. Démontrer que la courbe \mathcal{C} se situe toujours au dessus de la courbe \mathcal{C}' .



Partie B : étude d'un lieu géométrique

Soit a un nombre réel quelconque. On considère :

- la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a ;
- la tangente (T') à la courbe \mathcal{C}' au point d'abscisse a ;

On admet que les droites (T) et (T') ne sont jamais parallèles. On note M leur point d'intersection.

- a. Donner l'expression de l'équation réduite de la tan-

gente (T) en fonction de a .

- b. Donner l'expression de l'équation réduite de la tangente (T') en fonction de a .

- Déterminer l'abscisse du point du point M .

- a. Déterminer les coordonnées du M .

- b. Justifier que le point M appartient à la courbe d'une des fonctions de références qu'on précisera.

11. Etude de fonctions avec dérivées secondes ou fonctions annexes :

Exercice 5235



Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x \cdot (e^x - e) + e - 2$$

- Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g''(x) = (2 + x)e^x$$

- En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.
- Etablir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
- En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

12. Etudes de famille de fonctions :

Exercice 5856



Partie A

On considère la famille de fonctions (f_k) définie pour $k \in \mathbb{N}$ par : $f_k(x) = (x+k) \cdot e^x + x$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans une repère orthonormé.

Quelle fonction de la famille (f_k) admet la droite (d) d'équation $y = x - e^{-2}$ comme tangente au point d'abscisse -2 .

Partie B

- On considère la fonction g définie par :
 $g(x) = (x+1) \cdot e^x + e^{-2}$.
 - Déterminer l'expression de la fonction g' .
 - Dresser le tableau de variation de la fonction g .
- Déduire des questions précédentes la position relative de la courbe \mathcal{C}_1 et de la droite (d).

Exercice 5848



Etant donné un nombre réel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + e^{-k \cdot x}}$$

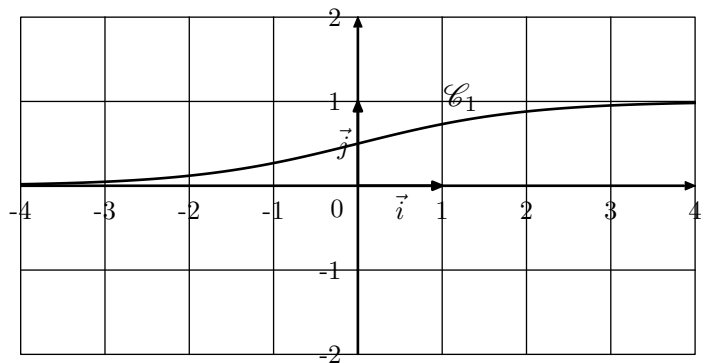
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie, on choisit $k=1$. On a, pour tout réel x :

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

La représentation graphique \mathcal{C}_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée ci-dessous :



- Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
- Démontrer que, pour tout réel x : $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.
- On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur \mathbb{R} . Calculer, pour tout réel x , $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur \mathbb{R} .

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k=-1$ et on souhaite tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} représentant la fonction f_{-1} .

Pour tout réel x , on appelle P le point de \mathcal{C}_1 d'abscisse x et M le point de \mathcal{C}_{-1} d'abscisse x .

On note K milieu du segment $[MP]$.

- Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.
- En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.
- Tracer la courbe \mathcal{C}_{-1} sur le repère ci-dessous.

Exercice 6964



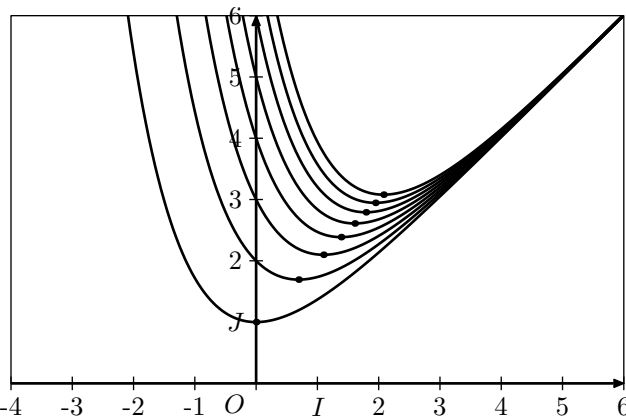
Soit k un réel strictement positif. On considère les fonctions

f_k définies sur \mathbb{R} par :

$$f_k(x) = x + k \cdot e^{-x}$$

On note \mathcal{C}_k la courbe représentative de la fonction f_k dans un plan muni d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous quelques courbes \mathcal{C}_k pour différentes valeurs de k .



Pour tout réel k strictement positif, la fonction f_k admet un minimum sur \mathbb{R} . La valeur en laquelle ce minimum est atteint est l'abscisse du point A_k de la courbe \mathcal{C}_k . Il semblerait que, pour tout réel k strictement positif, les points A_k soient alignés.

Est ce le cas ?

13. Etude d'exponentielles avec utilisation du logarithme :

Exercice 3705



Soit f la fonction définie par la relation :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1}$$

1. Déterminer l'ensemble \mathcal{D}_f de définition de la fonction f .

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Montrer que la fonction f' admet pour expression :

$$f'(x) = -\frac{e^x \cdot (e^{2x} - 4 \cdot e^x + 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$

3. a. Etudier le signe du polynôme $x^2 - 4x + 1$.

b. En déduire que la fonction f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

On précisera les valeurs de a et de b .

4. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f . On y précisera les valeurs approchées de $f(a)$ et de $f(b)$.

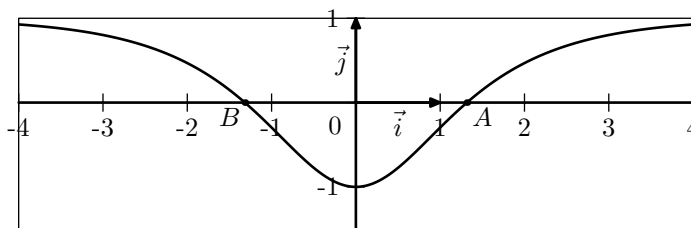
Exercice 1255



Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \frac{4 \cdot e^x}{e^{2x} + 1}$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe \mathcal{C} . Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B .



L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1. La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

a. Vérifier que pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{4 \cdot e^x \cdot (e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^2}$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$

2. La droite d'équation $x=0$ semble être un axe de symétrie de la courbe \mathcal{C} .

Démontrer que cette conjecture est vraie.

(Question hors programme 2012)

3. On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

a. Démontrer que le réel c est une solution de l'équation : $x^2 - 4x + 1 = 0$

En déduire la valeur exacte de a .

b. Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x .